目　　录

第一章 预备知识

本章将介绍调和分析中一些最基本的结果。这些结果在以后各章中将经常用到。

贯穿全书，我们将采用以下的符号。$\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间。$\boldsymbol{R}^n$ 的点用 x,y,z 等表示，如 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。$x\cdot y$ 表示$\boldsymbol{R}^n$的内积$x\cdot y=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$。$|x|$表示 x 的模 $|x|=(x\cdot x)^{1/2}$。$\mathrm{d}x$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Lebesgue 积分元。如果 E 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的集合，则 E^c 是它的补集，$\bar{E}$ 是它的闭包，$|E|$ 是它的 Lebesgue 测度，$\chi_E(x)$ 或简记为 χ_E 是 E 的特征函数。通常用 Q 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中其边平行于坐标轴的立方体，或简称为方体。kQ 表示与 Q 同心边长为 Q 的 k 倍的立方体。$B(x,r)$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中以 x 为中心 r 为半径的开球体。$\mathscr{S}$ 表示 Schwartz 速降函数类，$\mathscr{S}'$ 是 $\mathscr{S}$ 的广义函数空间，即缓增广义函数类。$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 表示 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的上半空间 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}=\{(x,t)\,|\,x\in\boldsymbol{R}^n,\ t>0\}$。$\|f\|_p$ 表示 f 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 的范数。按照通常的习惯，C 表示常数，但它在不同的地方可以表示不同的值。

§1.1 Hardy-Littlewood 极大函数

定义1.1 设 f 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的局部可积函数。对每一点 $x\in\boldsymbol{R}^n$，定义

$$M(f)(x)=\sup_{Q:\,x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

称 $M(f)$ 为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数。

命题1.1 $M(f)$ 是下半连续函数，即对任意 $t>0$，集合

$E_t=\{x\in \boldsymbol{R}^n: M(f)(x)>t\}$是开集。

证明 设$x_0\in E_t$，则$M(f)(x_0)>t$。由定义知存在Q_0，使得$x_0\in Q_0$，且

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(y)|\mathrm{d}y>t.$$

显然存在一个以x_0为中心，半径为r_0的球$B(x_0,r_0)=\{x\in \boldsymbol{R}^n: |x-x_0|<r_0\}$，满足$B(x_0,r_0)\subset Q_0$，且对任意$x\in B(x_0,r_0)\subset Q_0$，有

$$M(f)(x)\geqslant\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(y)|\mathrm{d}y>t,$$

故$B(x_0,r_0)\subset E_t$，从而证明了E_t是开集。证毕。

定理1.1 设$f\in L^1(R^n)$，则对任意的$t>0$，有

$$|\{x\in \boldsymbol{R}^n: M(f)(x)>t\}|\leqslant\frac{C}{t}\|f\|_1,$$

其中C是与f,t无关的固定常数。

证明 记$E_t=\{x\in \boldsymbol{R}^n: M(f)(x)>t\}$。设$x\in E_t$，则存在一个方体$Q_x$，使得$x\in Q_x$，且

$$\int_{Q_x}|f(y)|\mathrm{d}y>t|Q_x|.$$

下面我们按Vitali覆盖原理，选取方体序列$\{Q_k\}$，使得Q_k互不相交，但$E_t\subset\bigcup 5Q_k$。事实上，由于

$$|Q_x|<\frac{1}{t}\int_{Q_x}|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{t}\|f\|_1,$$

可以选取Q_1，使得$l(Q_1)\geqslant\frac{1}{2}\sup l(Q_x)$，其中$l(Q)$表示$Q$的边长。假设$Q_1,\cdots,Q_{k-1}$已经选取完毕，我们选取$Q_k$，使得

$$l(Q_k)\geqslant\frac{1}{2}\sup\{l(Q_x): Q_x\cap Q_j=\varnothing,\ j=1,\cdots,k-1\}.$$

如果按上述原则选取的方体序列是有限的，则显然有 $E_t \subset \bigcup 5Q_k$，这是因为每个 Q_{x_0} 都同某个 Q_{k_0} 相交，而由 Q_{k_0} 的取法知 $l(Q_{k_0}) \geqslant \frac{1}{2} l(Q_{x_0})$。如果选取的方体序列是无穷的，则由 Q_k 互不相交，知

$$\sum_k |Q_k| \leqslant \sum_k \frac{1}{t} \int_{Q_k} |f(y)| \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{t} \|f\|_1,$$

故 $\lim\limits_{k \to \infty} l(Q_k) = 0$。对任意 $x \in E_t$，存在 Q_x，使得 $x \in Q_x$。由 Q_k 的选法以及 $l(Q_k) \to 0$ 知 Q_x 必与某个 Q_k 相交。取 k 为具有此性质的最小整数，则 $l(Q_k) \geqslant \frac{1}{2} l(Q_x)$，从而 $Q_x \subset 5Q_k$，这就证明了 $E_t \subset \bigcup 5Q_k$。于是

$$|E_t| \leqslant \sum_k |5Q_k| \leqslant C \sum_k |Q_k| \leqslant \frac{C}{t} \|f\|_1.$$

定理1.1获证。

定理1.2 设 $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1 < p \leqslant \infty$，则

$$\|M(f)\|_p \leqslant C \|f\|_p,$$

其中 C 只依赖于 p 与维数 n，与 f 无关。

证明 $p = \infty$ 时，

$$\|M(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

是显然的。

考虑 $1 < p < \infty$ 的情形。对任意 $t > 0$，设

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当} |f(x)| > t/2, \\ 0, & \text{当} |f(x)| \leqslant t/2, \end{cases}$$

以及

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{当} |f(x)| > t/2, \\ f(x), & \text{当} |f(x)| \leqslant t/2. \end{cases}$$

显然 $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$，且 $f_1(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，这是因为

$$\int_{R^n}|f_1(x)|\mathrm{d}x=\int_{\{x:\,|f(x)|>\frac{t}{2}\}}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\{x:\,|f(x)|>\frac{t}{2}\}}|f(x)|\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^{p-1}\int_{R^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

记

$$E_t=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f)(x)>t\},$$

则

$$E_t\subset\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f_1)(x)>\frac{t}{2}\right\}\cup\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f_2)(x)>\frac{t}{2}\right\}$$

$$=\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f_1)(x)>\frac{t}{2}\right\}.$$

根据定理1.1，有

$$|E_t|\leqslant\frac{C}{t}\|f_1\|_1=\frac{C}{t}\int_{\{x:\,|f(x)|>t/2\}}|f(x)|\mathrm{d}t.$$

因此

$$\|M(f)\|_p^p=\int_{R^n}M(f)^p(x)\mathrm{d}x=p\int_0^\infty t^{p-1}|E_t|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Cp\int_0^\infty t^{p-2}\int_{\{x:\,|f(x)|>\frac{t}{2}\}}|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Cp\int_{R^n}|f(x)|\int_0^{2|f(x)|}t^{p-2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{Cp}{p-1}\int_{R^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

推论1.1 设E是$\boldsymbol{R}^n$中测度有限的集合，令$\tilde{E}=\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(\chi_E)(x)>\frac{1}{2}\right\}$，其中$\chi_E$表示$E$的特征函数，则$|\tilde{E}|\leqslant C|E|$，其

中 C 与 E 无关。

证明 由定理1.1知 $|\tilde{E}|\leqslant C\|\chi_E\|_1=C|E|$。证毕。

推论1.2 设 $f\in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，则对几乎所有的 $x\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y=0, \qquad (1.1)$$

其中 $Q(x,r)$ 表示以 x 为中心边长为 r 的方体。

证明 不失一般性，可以假设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$。我们只需证明，对任意 $t>0$，

$$A_t=\left\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ \overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y>t\right\}$$

是一个零测集，这是因为使式(1.1)不成立的点包含在集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{1/j}$ 中。

对任意固定的 $\varepsilon>0$，令 $f=g+h$，其中 g 是具有紧支集的连续函数，且 $\int_{\boldsymbol{R}^n}|h|\mathrm{d}x<\varepsilon$。这时，显然有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|g(y)-g(x)|\mathrm{d}y=0$$

处处成立。因此

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|h(y)-h(x)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant M(h)(x)+|h(x)|.$$

故

$$A_t\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ M(h)(x)>t/2\}\cup\left\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ |h(x)|>\frac{t}{2}\right\}.$$

于是

$$|A_t|\leqslant\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(h)(x)>\frac{t}{2}\right\}\right|+\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |h(x)|>\frac{t}{2}\right\}\right|$$

$$\leqslant Ct^{-1}\|h\|_1+2t^{-1}\|h\|_1<Ct^{-1}\varepsilon,$$

由 ε 可任意小，便推出 $|A_t|=0$。

推论1.3 设 $f\in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，则对几乎所有的 $x\in\boldsymbol{R}^n$，有 $|f(x)|\leqslant M(f)(x)$。

证明 由推论1.2直接推出。

推论1.3告诉我们，Hardy-Littlewood 极大函数 $M(f)(x)$ 是较 $f(x)$ 大的函数，但定理1.1与定理1.2说明，它并不太大，它的 L^p 模 $(1<p\leqslant\infty)$ 被 f 的 L^p 模控制($p=1$时是"弱 L^1 模")。因此，对很多算子来说，便可以通过 Hardy-Littlewood 极大函数进行估计。这一点以后将会经常遇到。在这里我们看一个恒等逼近的例子。

定理1.3 设 $\varphi(x)\geqslant 0$ 是径向函数，即 $\varphi(x)=\varphi(|x|)$，$\varphi\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\varphi(t)$ 在 $(0,\infty)$ 单调下降，则对于任意 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\varphi_+(f)(x)\leqslant\|\varphi\|_1 M(f)(x),$$

其中

$$\varphi_+(f)(x)=\sup_{t>0}|\varphi_t*f(x)|,$$

$$\varphi_t(\cdot)=\frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right).$$

证明 先考虑

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^m a_j\chi_{B_j}(x)$$

的情形，其中 $\chi_{B_j}(x)$ 是 B_j 的特征函数，B_j 是一以原点为中心、r_j 为半径的球体：$B_j=B(0,r_j)$。这时

$$\int_{R^n}\varphi(x)\,dx=\sum_{j=1}^m a_j|B_j|.$$

而

$$\int_{R^n}f(y)\varphi(y)\,dy\leqslant\sum_{j=1}^m a_j|B_j|\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|f(y)|\,dy$$

$$\leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(0),$$

故

$$\int_{R^n} f(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(x).$$

注意到$\|\varphi_t\|_1 = \|\varphi\|$，便有

$$\sup_{t>0}\left|\int_{R^n} f(x-y)\varphi_t(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(x).$$

对于一般的φ，取具有上述性质的$\varphi^{(j)} \uparrow \varphi$，则

$$\left|\int_{R^n} f(x-y)\varphi_t(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{R^n} |f(x-y)|\varphi_t(y)\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{j\to 0}\int_{R^n} |f(x-y)|\varphi_t^{(j)}(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(x).$$

推论1.4 若$\varphi \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$，且

$$\Phi(x) = \sup_{|y|\geqslant|x|}|\varphi(y)| \in L^1(\boldsymbol{R}^n),$$

则对于任意$f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\varphi_+(f)(x) \leqslant CM(f)(x), \tag{1.2}$$

其中C与f无关，且对几乎所有的$x \in \boldsymbol{R}^n$，有

$$\lim_{t\to 0}\varphi_t * f(x) = f(x). \tag{1.3}$$

证明 只需注意$\varphi_+(f)(x) \leqslant \Phi_+(f)(x)$，并用定理1.3，便得(1.2)。至于等式(1.3)，只需根据(1.2)，并用推论1.2的证明方法便可得到。值得指出的是，在证明中需要用到下述事实：对具有紧支集的连续函数f，等式(1.3)是处处成立的。这一事实不难证明。细节也可参看下面的定理。

定理1.4 若$\varphi \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$，则对任意

$f \in L^p(R^n)$，$1 \leqslant p < \infty$，有

$$\lim_{t \to 0} \|\varphi_t * f - f\|_p = 0.$$

若 f 是紧支集的连续函数，则上述等式对 $p=\infty$ 也成立。

证明 由于

$$\varphi_t * f(x) - f(x) = \int_{R^n} [f(x-y) - f(x)] \varphi_t(y) \mathrm{d}y,$$

用 Minkowski 不等式，有

$$\|\varphi_t * f - f\|_p \leqslant \int_{R^n} \|f(\cdot - ty) - f(\cdot)\|_p |\varphi(y)| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_{R^n} \omega_p(-ty) |\varphi(y)| \mathrm{d}y,$$

其中 $\omega_p(h)$ 是 f 的 L^p 连续模：

$$\omega_p(h) = \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p.$$

容易看出，当 f 是具有紧支集的连续函数时，$\omega_p(h) \to 0$（当 $h \to 0$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$）。而当 $f \in L^p$，$1 \leqslant p < \infty$，通过用具有紧支集的连续函数逼近，也有 $\omega_p(h) \to 0$（当 $h \to 0$）。用 Lebesgue 控制收敛定理，使得定理所要求的结论。证毕。

证明定理1.2的方法是，为证明算子 $M(f)$ 是 L^p 有界的（$1 < p < \infty$），我们利用 M 是 L^∞ 有界的，以及对应于 $p=1$ 时的定理1.1。这种方法具有普遍的意义，称为算子内插。下面给出一个较为一般的一个算子内插定理。

定义1.2 我们称算子 T 是弱 (p,p) 型的，其中 $0 < p < \infty$，如果存在常数 C，使得对任意 $\lambda > 0$，有

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^n:\ |T(f)(x)| > \lambda\}| \leqslant C\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^p.$$

我们称算子 T 是强 (p,p) 型的（或简称 (p,p) 型），其中 $0 < p \leqslant \infty$，如果存在常数 $C > 0$，使得

$$\|T(f)\|_p \leq C\|f\|_p.$$

当 $p=\infty$ 时，弱型就用强型定义。

前面的结果是说，Hardy-Littlewood 极大函数是弱 (1,1) 型与强 (p,p) 型的，$1<p\leq\infty$。值得注意的是，定理1.2的证明，实质上是从 $M(f)$ 的弱(1,1)型与弱(∞,∞)型，推出它是强(p,p)型的，$1<p<\infty$。这个证明具有一般的意义。它的一般化就是下面要叙述的算子内插定理。

定义1.3 算子 $f\to T(f)$ 称为是次可加的，如果对几乎所有的 $x\in \boldsymbol{R}^n$，有

$$|T(C_1f_1+C_2f_2)(x)|\leq|C_1||T(f_1)(x)|+|C_2||T(f_2)(x)|.$$

定理1.5 (Marcinkiewicz 算子内插定理) 设 T 是次可加算子，且是弱(p_0,p_0)型与弱(p_1,p_1)型的$(1\leq p_0<p_1\leq\infty)$，则对 $p_0<p<p_1$，T 是强(p,p)型的。

证明 先考虑 $p_1<\infty$ 的情形。设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$。对任意 $\lambda>0$，令

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当} |f(x)|\leq \dfrac{\lambda}{2}, \\ 0, & \text{当} |f(x)|>\dfrac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$f_2(x)=f(x)-f_1(x).$$

不难证明，$f_1\in L^{p_1}(\boldsymbol{R}^n)$，$f_2\in L^{p_0}(\boldsymbol{R}^n)$。因此

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x:\ |T(f)(x)|>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda \\ &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left|\left\{x:\ |T(f_1)(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\mathrm{d}\lambda \\ &\quad + p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left|\left\{x:\ |T(f_2)(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

$$\leqslant Cp\int_0^{\infty}\lambda^{p-p_1-1}\|f_1\|_{p_1}^{p_1}\mathrm{d}\lambda + Cp\int_0^{\infty}\lambda^{p-p_0-1}\|f_2\|_{p_0}^{p_0}\mathrm{d}\lambda$$

$$= Cp\int_0^{\infty}\lambda^{p-p_1-1}\int_{\{x:\ |f(x)|\leqslant\lambda/2\}}|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda$$

$$+ Cp\int_0^{\infty}\lambda^{p-p_0-1}\int_{\{x:\ |f(x)|>\lambda/2\}}|f(x)|^{p_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda$$

$$= Cp\int_{R^n}|f(x)|^{p_1}\int_{2|f(x)|}^{\infty}\lambda^{p-p_1-1}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x$$

$$+ Cp\int_{R^n}|f(x)|^{p_0}\int_0^{2|f(x)|}\lambda^{p-p_0-1}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x$$

$$= Cp\left(\frac{1}{p_1-p}+\frac{1}{p-p_0}\right)\|f\|_p^p.$$

当 $p_1=\infty$时，只需重复定理1.2的证明便可．证毕．

§1.2 Whitney分解与Calderón-Zygmund分解

这里说的 Whitney 分解，是指把R^n中的开集分解为方体的并集，而方体的直径与方体至开集的补集之距离是可以比较的，且方体是互不重叠的．在下面的定理中，方体可理解为闭的，互不重叠表示它们内部不交．

定理2.1（Whitney 分解定理） 设F是$\boldsymbol{R}^n$的闭集，则存在方体序列$\mathscr{F}=\{Q_k\}$，使得

(1) $\bigcup_k Q_k=\Omega=F^c$；

(2) Q_k 互不重叠；

(3) $C_1\operatorname{diam}Q_k\leqslant\operatorname{dist}(Q_k,F)\leqslant C_2\operatorname{diam}Q_k$，

其中 diam Q 表示Q的直径，C_1,C_2与F无关(实际上，我们可以取$C_1=1$，$C_2=4$)．

证明 考虑由 $\boldsymbol{R}^n$ 中的整数格点作顶点所构成的全体方体，记作 $\mathscr{M}_0$。令 $\mathscr{M}_k=2^{-k}\mathscr{M}_0$。这样，$\mathscr{M}_{k+1}$ 中的每个方体是由 $\mathscr{M}_k$ 中某一个方体 2^n 等分而得到的。$\mathscr{M}_k$ 中每个方体的边长为2^{-k}，直径为$\sqrt{n}\,2^{-k}$。再令

$$\Omega_k=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ 2\sqrt{n}\,2^{-k}<\operatorname{dist}(x,F)<2\sqrt{n}\,2^{-k+1}\}.$$

显然，$\Omega=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\Omega_k$，记

$$\mathscr{F}_k=\{Q|\in\mathscr{M}_k,\quad Q\cap\Omega_k\neq\varnothing\},$$

$$\mathscr{F}^0=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_k.$$

则 $\Omega=\bigcup_{Q\in\mathscr{F}^0}Q$.事实上，$\Omega\supset\bigcup_{Q\in\mathscr{F}^0}Q$是显然的。下面证明反过来的包含关系。对任意 $y\in Q,Q\in\mathscr{F}^0$,这时有 $Q\in\mathscr{M}_k,Q\cap\Omega_k\neq\varnothing$,即存在 $x\in Q,x\in\Omega_k$.因此

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(y,F)&\geqslant\operatorname{dist}(x,F)-\operatorname{dist}(x,y)\\&\geqslant2\sqrt{n}\,2^{-k}-\sqrt{n}\,2^{-k}=\sqrt{n}\,2^{-k},\end{aligned}\tag{2.1}$$

故 $y\in\Omega$。

从(2.1)看出，当 $Q\in\mathscr{F}^0$ 时，

$$\operatorname{diam}Q\leqslant\operatorname{dist}(Q,F)\leqslant4\operatorname{diam}Q.$$

因此，除了(2)以外，$\mathscr{F}^0$满足定理的要求。剩下我们只需精化所做的挑选。为此，需要下面的简单事实：设 Q_1 与 Q_2 分别是从 $\mathscr{M}_{k_1}$ 与 $\mathscr{M}_{k_2}$ 中选取的方体，如果Q_1与Q_2有重叠，则一定是一个被另一个包含。特别地，如果 $k_1\geqslant k_2$,则 $Q_1\subset Q_2$。这是因为Q_1 与Q_2都是二进方体。现从任何一个$Q\in\mathscr{F}^0$ 开始，并考虑在$\mathscr{F}^0$ 中包含Q的极大方体。设 $Q'\in\mathscr{F}^0$，$Q\subset Q'$，则

$$\operatorname{diam}Q'\leqslant\operatorname{dist}(Q',F)\leqslant\operatorname{dist}(Q,F)\leqslant4\operatorname{diam}Q.$$

这说明，在 $\mathscr{F}^0$ 中存在包含Q的极大方体。另外，由上述的简单

事实知，极大方体是唯一的。现令$\mathscr{F}$是$\mathscr{F}^0$中所有极大方体构成的集合，则$\mathscr{F}$中的方体满足定理的要求，定理2.1得证。

我们对定理证明中的$\mathscr{F}$作进一步的说明。我们称 $Q_1, Q_2 \in \mathscr{F}$ 是相接的，如果它们的边界交集非空。

引理2.1 设$Q_1, Q_2 \in \mathscr{F}$是相接的，则

$$\frac{1}{4}\operatorname{diam} Q_2 \leqslant \operatorname{diam} Q_1 \leqslant 4 \operatorname{diam} Q_2.$$

证明 由 $\operatorname{dist}(Q_1, F) \leqslant 4 \operatorname{diam} Q_1$，知

$$\operatorname{dist}(Q_2, F) \leqslant 4 \operatorname{diam} Q_1 + \operatorname{diam} Q_1 = 5 \operatorname{diam} Q_1,$$

而 $\operatorname{diam} Q_2 \leqslant \operatorname{dist}(Q_2, F)$，故 $\operatorname{diam} Q_2 \leqslant 5 \operatorname{diam} Q_1$。但已知$\operatorname{diam} Q_2$与 $\operatorname{diam} Q_1$ 之比是 2^k，故只能有 $\operatorname{diam} Q_2 \leqslant 4 \operatorname{diam} Q_1$。由对称性便得引理要求的结论。

引理2.2 存在常数N仅与维数有关，对任何$Q \in \mathscr{F}$，在$\mathscr{F}$中至多有N个方体与Q相接。

证明 实际上，只要取$N = 12^n$。因为可以设$Q \in \mathscr{M}_k$，则有3^n个方体(包括Q)本身属于$\mathscr{M}_k$且与Q相接，而$\mathscr{M}_k$中每个方体，至多包含$\mathscr{F}$中 4^n 个半径 $\geqslant \frac{1}{4}\operatorname{diam} Q$ 的方体。证毕。

设Q_k是$\mathscr{F}$中任意一个方体，x_k是其中心，l_k是其边长，则 $\operatorname{diam} Q_k = \sqrt{n}\, l_k$。取$\varepsilon$: $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$，令 $Q_k^* = (1+\varepsilon)Q_k$。显然 $Q_k \subset Q_k^*$，而Q_k^*不再是互不重叠的。但我们有

定理2.2 Ω中的每个点至多属于N个Q_k^*。

证明 若$Q, Q_k \in \mathscr{F}$，则当Q_k与Q相接时，Q_k^*才可能与Q相交。这是由于，考虑$\mathscr{F}$中所有与Q_k相接的方体，它们的直径不小于 $\frac{1}{4}\operatorname{diam} Q_k$，而显然它们的并集包含$Q_k^*$，故$Q$与$Q_k^*$相交．仅当$Q$与$Q_k$相接.对任意$x \in \Omega$，则$x$属于某个方体$Q \in \mathscr{F}$.由引理2.2，至多有$N$个方体$Q_k$与$Q$相接，从而至多有$N$个$Q_k^*$包含$x$.证毕。

设 Q_0 是以原点为中心的单位方体。固定一个 C^∞ 函数 φ:

$0\leqslant\varphi\leqslant 1$；当$x\in Q_0$时$\varphi(x)=1$，当$x\notin(1+\varepsilon)Q_0$时$\varphi(x)=0$。再令$\varphi_k(x)=\varphi\left(\frac{x-x_k}{l_k}\right)$,其中$x_k$是$Q_k\in\mathscr{F}$的中心，$l_k$是它的边长。则当$x\in Q_k$时,$\varphi_k(x)=1$,当$x\notin Q_k^*$时,$\varphi_k(x)=0$。进一步还有

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\varphi_k(x)\right|\leqslant A_\alpha(\mathrm{diam}\,Q_k)^{-|\alpha|}.$$

定义$\varphi_k^*(x)=\varphi_k(x)\Phi^{-1}(x)$,$x\in\Omega$,其中$\Phi(x)=\sum_k\varphi_k(x)$,则显然

$$\sum_k\varphi_k^*(x)\equiv 1,\quad 当\ x\in\Omega.$$

我们称上式为Ω上的单位分解。

定理2.3(Calderón-Zygmund 分解)　设$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,任意$\lambda>0$,则存在互不重叠的方体序列$Q_k$,满足:

(1) $\boldsymbol{R}^n=\Omega\cup F$,$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k$;

(2) $\lambda<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda$;

(3) 对几乎所有的$x\in F$,有$|f(x)|\leqslant\lambda$;

(4) $|\Omega|\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

证明　选取充分大的方体Q,使得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\lambda.$$

以Q为标准划分整个$\boldsymbol{R}^n$。然后再把每一个方体等分成2^n个小方体。记这样的小方体为Q'。于是有两种可能的情形:

第一种情形

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\lambda;$$

第二种情形

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x>\lambda.$$

对第二种情形，保留 Q' 不动。对第一种情形，继续对 Q' 进行 2^n 等分。如此继续下去，便得到全体第二种情形构成的方体序列 Q_k。记 $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k, F=\Omega^c$。对任意$Q_k$，设 $\tilde{Q}_k$ 是包含Q_k 的早一代的方体，则$|\tilde{Q}_k|=2^n|Q_k|$，且

$$\frac{1}{|\tilde{Q}_k|}\int_{\tilde{Q}_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\lambda,$$

故

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q_k|}\int_{\tilde{Q}_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda.$$

而由 Q_k 互不重叠可知

$$|\Omega|=\sum|Q_k|\leqslant\sum\frac{1}{\lambda}\int_{Q_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{R^n}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

对任意 $x\in F$，即 $x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k$，则存在第一种情形的方体列 Q'_j，使得 $x\in Q'_j$，$|Q'_j|\to 0$。由推论1.2知对几乎所有的 $x\in F$，有

$$|f(x)|=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{|Q'_j|}\int_{Q'_j}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\lambda.$$

定理2.3证完。

下面我们利用 Hardy-Littlewood 极大函数与 Whitney 分解，证明上述定理的一个变形。

定理2.4（Calderón-Zygmund分解另一形式） 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，任意 $\lambda>0$，则存在互不重叠的方体序列 Q_k，满足

(1) $\boldsymbol{R}^n=\Omega\cup F, \Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k$；

(2) $\dfrac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant A\lambda$；

(3) 对几乎所有的 $x\in F$，有 $|f(x)|\leqslant\lambda$；

(4) $|\Omega|\leqslant\frac{B}{\lambda}\|f\|_1$；

(5) $C\operatorname{diam}Q_k\leqslant\operatorname{dist}(Q_k,F)\leqslant\frac{1}{C}\operatorname{diam}Q_k$，

其中 A,B,C 是与 f,k,λ 无关的常数。

证明 令 $\Omega=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ M(f)(x)>\lambda\}$，$F=\Omega^c$。由定理1.1与推论1.3便知(3)，(4)成立。利用 Whitney 分解，$\Omega=\bigcup\limits_{k=1}Q_k$，其中 Q_k 互不重叠，且满足(5)。对于任意一个 Q_k，设 $y_k\in F$，使得 $\operatorname{dist}(F,Q_k)=\operatorname{dist}(y_k,Q_k)$。取 $\bar{Q}_k$ 为以 y_k 为中心且包含了 Q_k 的最小方体。由性质(5)知 $\frac{|\bar{Q}_k|}{|Q_k|}\leqslant A$，其中 A 只依赖于常数 C 与维数 n。由于 $y_k\in F$，故

$$\lambda\geqslant M(f)(y_k)\geqslant\frac{1}{|\bar{Q}_k|}\int_{\bar{Q}_k}|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{A|Q_k|}\int_{Q_k}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

这就是(2)，定理 2.4 得证。

应用 Calderón-Zygmund 分解，便可得到

定理2.5（Calderón-Zygmund 函数分解定理） 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，对任意 $\lambda>0$，$1\leqslant p<\infty$，存在 f 的分解 $f=g+b$，其中

$$\|g\|_p^p\leqslant C\lambda^{p-1}\|f\|_1,$$

而 $b(x)=\sum\limits_k b_k(x)$，$b_k(x)$ 满足：

(1) $\operatorname{supp}b_k(x)\subset Q_k$，$Q_k$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的方体；

(2) $\int_{R^n}b_k(x)\mathrm{d}x=0$；

(3) $\|b_k(x)\|_1\leqslant C\lambda|Q_k|$。

证明 利用定理2.4，我们得到 $\boldsymbol{R}^n$ 的分解：$\boldsymbol{R}^n=\Omega\cup F$，其中 $\Omega=\bigcup Q_k$，具有定理2.4所断言的性质。定义

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in F, \\ \dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k} f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } x\in Q_k, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b(x) &= f(x)-g(x) \\ &= \sum_k \left[f(x)-\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\mathrm{d}y\right]\chi_{Q_k}(x) \\ &= \sum_k b_k(x), \end{aligned}$$

其中 $\chi_{Q_k}(x)$ 表示 Q_k 的特征函数。这样

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &\leqslant \int_F |f(x)|^p \mathrm{d}x + \sum_k \int_{Q_k}\left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(y)|\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \lambda^{p-1}\|f\|_1 + C\lambda^p|\Omega| \leqslant C\lambda^{p-1}\|f\|_1, \end{aligned}$$

而

$$\|b_k\|_1 \leqslant 2\int_{Q_k}|f(y)|\mathrm{d}y \leqslant C\lambda|Q_k|,$$

b_k 具有性质(1),(2)是显然的。定理 2.5 获证。

§1.3 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

设 A 与 B 是两个 Banach空间，T 是线性算子，将函数 $f: \boldsymbol{R}^n \to A$ 映射到函数 Tf：$\boldsymbol{R}^n \to B$. 它是由积分

$$T(f)(x)=\int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

定义的，其中 $K(x,y)$ 定义在 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\setminus\{x=y\}$，取值在

$$\mathscr{L}(A,B)=\{\text{全体由 } A \text{ 到 } B \text{ 的有界线性算子}\}.$$

下面用 $|\cdot|_A$, $|\cdot|_B$ 分别表示空间 A 与 B 的范数，$\|K\|$ 表示算子 K 在 $\mathscr{L}(A,B)$ 的范数。

定理3.1 如果 $K(x,y)$ 满足：

(1) 对一切 $x,y,h\in\boldsymbol{R}^n$, $|h|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$，有

$$\|K(x,y+h)-K(x,y)\|\leqslant\frac{C|h|^{\delta}}{|x-y|^{n+\delta}}$$

成立，其中 $\delta\in(0,1]$是个固定数；

(2) $\|T(f)\|_{L_B^{p_0}}\leqslant C\|f\|_{L_A^{p_0}}$ 对某个 $1<p_0\leqslant\infty$成立，则对任意 $1<p<p_0$，有

$$\|T(f)\|_{L_B^p}\leqslant C_p\|f\|_{L_A^p},\tag{3.1}$$

以及

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ |Tf(x)|_B>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_A^1}.\tag{3.2}$$

证明 实际上，只需证明(3.2)，因为(3.1)可以由 Marcinkiewicz 算子内插定理得到。现设 $f\in L_A^1$，$\lambda>0$。由Calderón-Zygmund 函数分解定理，知 $f=g+b$，其中

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } x\in F,\\ \dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } x\in Q_k,\end{cases}$$

$$b(x)=\sum b_k(x)。$$

由T在 $L_A^{p_0}$有界，得

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n:|Tg(x)|_B>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda^{p_0}}\|g\|_{L_A^{p_0}}^{p_0}\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_A^1}.$$

记 $\tilde{Q}_k$ 为与Q_k同心，边长扩大$2\sqrt{n}$倍的立方体，即 $\tilde{Q}_k=2\sqrt{n}\,Q_k$。当 $x\notin\bigcup\tilde{Q}_k$，有

$$\begin{aligned}T(b_k)(x)&=\int_{Q_k}K(x,y)b_k(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{Q_k}[K(x,y)-K(x,\bar{y}_k)]b_k(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $\bar{y}_k$ 为 Q_k 的中心。因此

$$|T(b_k)(x)| \leqslant \frac{C\,\mathrm{diam}(Q_k)^\delta}{|x-\bar{y}_k|^{n+\delta}}\|b_k\|_{L_A^1}.$$

对 k 求和，便得到

$$\int_{x\notin\cup\tilde{Q}_k}|T(b)(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_k\int_{x\notin\tilde{Q}_k}\frac{C\,\mathrm{diam}(Q_k)^\delta}{|x-\bar{y}_k|^{n+\delta}}\|b_k\|_{L_A^1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_k\|b_k\|_{L_A^1}\leqslant C\|f\|_{L_A^1}.$$

故

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n:|T(b)(x)|_B>\lambda\}|$$

$$\leqslant\left|\bigcup_k\tilde{Q}_k\right|+\left|\{x\notin\bigcup\tilde{Q}_k:|T(b)(x)|_B>\lambda\}\right|$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_A^1},$$

于是(3.2)成立。定理3.1获证。

下面给出一些重要例子。

例1 Calderón-Zygmund 卷积算子：

$$T(f)(x)=f*K,$$

其中 K 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的复值函数，可表为

$$K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n},$$

式中 $\Omega(x)=\Omega(|x|)$ 是 0 次齐次函数，满足

(1) $\int_{S^{n-1}}\Omega(x)\mathrm{d}\sigma(x)=0$，其中 S^{n-1} 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的单位球面；

(2) $|\Omega(x+h)-\Omega(x)|\leqslant C|h|^\delta$，当 $x, x+h\in S^{n-1}$，$0<\delta\leqslant 1$。

容易证明，这时 $K(x,y)$ 满足定理3.1的条件(1)，而 $|\hat{K}(\xi)|\leqslant C$，其中 C 是常数，因此 T 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 有界的。用定理 3.1 知 T 是 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 有界的，其中 $1<p\leqslant 2$。显然，$T^*(f)=f*\tilde{K}$，$\tilde{K}(x)=K(-x)$。应用定理3.1于 T^*，知 T^* 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 有界，$1<p\leqslant 2$。从

而T在$L^p(\boldsymbol{R}^n)$有界，$2\leqslant p<\infty$。这样，我们证明了T是$L^p(\boldsymbol{R}^n)$的有界算子，$1<p<\infty$。

当$n=1$时，取$K(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{x}$，这时$T$是Hilbert变换：

$$H(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_R\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

$K(x)$的Fourier变换为$\hat{K}(\xi)=\mathrm{i}\operatorname{sgn}\xi$。因此，$H$也可以表为

$$(H(f))^\wedge(\xi)=\mathrm{i}\operatorname{sgn}\xi\,\hat{f}(\xi).$$

根据上面的讨论，H是L^p有界的，$1<p<\infty$。

对一般的n，取$K(x)=C_n\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$，其中

$$C_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{3.4}$$

这时T是Riesz变换：

$$R_j(f)(x)=C_n\int_{R^n}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)\mathrm{d}y, \tag{3.5}$$

$$j=1,2,\cdots,n.$$

$K(x)$的Fourier变换为

$$m_j(\xi)=\mathrm{i}\frac{\xi_j}{|\xi|}.$$

因此，R_j也可以表为

$$(R_j(f))^\wedge(\xi)=\mathrm{i}\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi),\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{3.6}$$

根据上面的讨论，R_j是$L^p(\boldsymbol{R}^n)$有界的，$1<p<\infty$，$j=1,2,\cdots,n$。

例2 Littlewood-Paley-Stein函数。

g 函数与 S 函数是最基本、最重要的 Littlewood-Paley-Stein 函数．它们可以如下定义．取 $\psi\in C^\infty$，满足

(1) $|\psi(x)|\leqslant\dfrac{C}{1+|x|^{n+1}}$, $|\nabla\psi(x)|\leqslant\dfrac{C}{1+|x|^{n+2}}$,

(2) $\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$,

(3) $\int_0^\infty\dfrac{|\hat\psi(\xi t)|^2}{t}\mathrm{d}t\leqslant C$,

其中 C 与 ξ 无关．显然，如果 ψ 是径向函数，则只需作变量替换便知(3)中的积分与 ξ 无关，而(1)保证 $\psi\in L$，它蕴含了 $\hat\psi$ 绝对连续，(2)意味着 $\hat\psi(0)=0$，从而(3)成立．更进一步，如果 $\psi\in\mathscr{S}$ 是径向函数，$\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，则上述关于 ψ 的一切条件皆满足．

我们定义

$$g(f)(x)=\left(\int_0^\infty|f*\psi_t(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2},\qquad(3.7)$$

$$S(f)(x)=\left(\iint_{\Gamma(x)}|f*\psi_t(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/2},\qquad(3.8)$$

分别称为 f 的 g 函数与 S 函数，其中

$$\Gamma(x)=\{(y,t)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ |y-x|<t\}$$

表示以 x 为顶点的锥．

定理3.2 若 $1<p<\infty$，则

$$\|g(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$
$$\|S(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

证明 我们只讨论 S 函数的情形．对 g 函数可以类似进行但更简单．我们把 S 函数看成一类特殊的 Calderón-Zygmund 奇异积分，满足定理 3.1 的条件。事实上，取 Banach 空间 $A=\boldsymbol{C}$，

$B=L^2\left(\Gamma(0)\times(0,\infty),\ \dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)$．定义函数 K：$\boldsymbol{R}^n\to B$ 如下：

$$K(x)(y,t)=\psi_t(x-y).$$

这样，$K(x-z)$可以看作 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\mathscr{L}(A,B)$的映射，因为从下面的证明将看出，对任意 $a\in\boldsymbol{C}$，$K(x)(y,t)a$是 $\boldsymbol{C}$ 到B的有界线性算子。定义

$$T(f)=K*f.$$

我们首先证明，T 是$L^2(\boldsymbol{R}^n)$到$L^2_B(\boldsymbol{R}^n)$有界的。由于

$$\|T(f)\|^2_{L^2_B(\boldsymbol{R}^n)}=\int_{R^n}|K*f|_B^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}\iint_{\Gamma(0)}|\psi_t*f(x-y)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}\int_0^\infty\int_{R^n}|\psi_t*f(y)|^2\chi(x,y,t)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}},$$

其中$\chi(x,y,t)$是集合$\{(x,y,t)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^{n+1}_+:|x-y|<t\}$的特征函数。显然

$$\int_{R^n}\chi(x,y,t)\mathrm{d}x\leqslant Ct^n,$$

其中C只依赖于维数。用 Plancherel 定理，有

$$\|T(f)\|^2_{L^2_B(R^n)}\leqslant C\int_0^\infty\int_{R^n}|\psi_t*f(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}$$

$$=C\int_0^\infty\int_{R^n}|\hat{\psi}(\xi t)\hat{f}(\xi)|^2\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C\int_{R^n}|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant C\|f\|_2^2.$$

其次验证核K满足定理3.1的条件(1)。设$|h|<\dfrac{|x-z|}{2}$，利用微分中值定理与ψ的条件，有

$$\|K(x,z+h)-K(x,z)\|^2_{\mathscr{L}(A,B)}$$

$$\leqslant \iint_{\Gamma(0)} |\psi_t(x-z-y-h)-\psi_t(x-z-y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}}$$

$$\leqslant C|h|^2\int_0^\infty\int_{|y|<t} \frac{t^2}{t^{2n+4}+|x-z-y-\theta h|^{2n+4}} \frac{dydt}{t^{n+1}}$$

$$= C|h|^2\left(\int_0^{|x-z|/4} + \int_{|x-z|/4}^\infty\right)\int_{|y|<t} \cdots dydt$$

$$= \text{I} + \text{II}.$$

容易看出,

$$\text{I} \leqslant C|h|^2\int_0^{|x-z|/4} \frac{tdt}{|x-z|^{2n+4}} \leqslant C\frac{|h|^2}{|x-z|^{2n+2}},$$

$$\text{II} \leqslant C|h|^2\int_{|x-z|/4}^\infty \frac{dt}{t^{2n+3}} = C\frac{|h|^2}{|x-z|^{2n+2}}.$$

这就证明了核K满足定理 3.1 的条件(1)。应用定理3.1，便知T是$L^p(\boldsymbol{R}^n)$到$L^p_B(\boldsymbol{R}^n)$有界的，$1<p\leqslant 2$。注意到T是卷积算子，应用简单的对偶性推理，便得T是$L^p(\boldsymbol{R}^n)$到$L^p_B(\boldsymbol{R}^n)$有界的，$2\leqslant p<\infty$。T在$L^p(\boldsymbol{R}^n)$到$L^p_B(\boldsymbol{R}^n)$有界，$1<p<\infty$，也就是说$S(f)$是$L^p(\boldsymbol{R}^n)$到$L^p(\boldsymbol{R}^n)$有界，$1<p<\infty$，这正是定理3.2所要证明的。

设P_t为$\boldsymbol{R}^n$的 Poisson核，即

$$P(x)=\frac{C_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \qquad P_t(x)=\frac{1}{t^n}P\left(\frac{x}{t}\right).$$

取$\psi_t=t\nabla P_t$，其中∇表示$\boldsymbol{R}^{n+1}$的梯度算子，则ψ满足S函数定义中的一切要求。这时S函数在$n=1$时就化为Lusin的面积积分；对$n>1$的情形，就化为Stein-Weiss所引入的广义面积积分：

$$S(u)(x)=\iint_{\Gamma(x)}|\nabla u(y,t)|^{2}t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t, \tag{3.9}$$

其中 u 是 f 的 Poisson 积分．一般说来，只要 u 是调和函数，我们便用(3.9)定义 u 的面积积分。

第二章　经典H^p空间

经典 H^p 空间是指由单位圆内或上半平面上的满足一定条件的解析函数组成的空间，因此，它原则上是单复变函数论的一部分。但由于解析函数的实部与虚部构成共轭调和函数，而它们的边值便是共轭函数，这是最简单也是最典型的奇异积分算子. 故经典H^p空间自然地与调和分析联系了起来。经典H^p 空间由于有解析函数的工具而使其理论显得简洁. 这些方法很难直接推广到高维。但经典 H^p 空间毕竟给我们提供了最简单的模型，是我们今后着重讲的高维H^p空间理论的出发点.

§2.1　调和函数与Poisson表示

在本章中我们主要是在复平面 $\boldsymbol{C}$ 的单位圆 $\boldsymbol{D}=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|<1\}$内讨论问题。$\boldsymbol{D}$ 的边界是单位圆周，用 $\boldsymbol{T}=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|=1\}$表示。设$\Omega\subset\boldsymbol{C}$是开区域，我们称 $f(z)=f(x+iy)$在Ω是调和函数，如果 f 作为 x,y 的函数在 Ω二次连续可微，且满足 Laplace方程：$\Delta f=0$。我们假设读者已熟知调和函数的平均值定理，极值原理以及有界调和函数的Liouville 定理等.

设 $u(z)$在 $B(0,R)=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|<R\}$调和，则存在解析函数

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k z^k,\quad |z|<R$$

使得 $u(z)=\operatorname{Re}F(z)$。记 $z=re^{i\theta}$,那末

$$u(z)=\frac{F(z)+\overline{F(z)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{C}_k r^k e^{-ik\theta}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta},$$

其中

$$a_k = \begin{cases} C_k/2, & k>0, \\ \mathrm{Re}C_0, & k=0, \\ \overline{C}_{-k}/2, & k<0. \end{cases}$$

因此

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \tag{1.1}$$

在 $r \leqslant R_1 (R_1 < R)$ 一致收敛．假如 $R_1 > 1$，则

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

代回(1.1)，便有

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} dt.$$

容易计算

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = 1 + 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} (re^{it})^k = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}.$$

这就是单位圆的Poisson核，我们用 $P_r(t)$ 表示它：

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

只需通过一个极限过程，便可把上述推理推广到：若 $u(z)$ 在 $\boldsymbol{D}$ 调和，在 $\overline{\boldsymbol{D}}$ 连续，则 $u(z)$ 在 $\boldsymbol{D}$ 的值可以通过它在边界 $\boldsymbol{T}$ 的值的 Poisson 积分表示出来：

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) u(e^{it}) dt, \quad r<1. \tag{1.2}$$

定理1.1 设 u 在D调和，且对 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 满足

$$\sup_{0<r<1}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}<\infty,$$

(1) 当$1<p\leqslant\infty$时，存在 $f\in L^p[-\pi,\pi]$，使得

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(t)dt,\quad 0\leqslant r<1;$$

(2) 当 $p=1$ 时，存在Borel测度 $\mu\in M[-\pi,\pi]$，使得

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t),\quad 0\leqslant r<1,$$

这里的 $M[-\pi,\pi]$是指$[-\pi,\pi]$上的全体复值 Borel 测度$\mu(t)$，满足

$$\int_{-\pi}^{\pi}d|\mu|(t)<\infty.$$

证明 (1) 由于当 $1<p\leqslant\infty$ 时，L^p 的前对偶空间 $L^{p'}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$是可分的。用泛函分析的 Banach-Alaoglu定理，知L^p的球体是＊弱列紧的。故存在 $r_n\to1$，使得

$$f_n(t)=u(r_n e^{it})\xrightarrow{*W}f(t)\in L^p(-\pi,\pi)\quad(n\to\infty).$$

对 $u(r_n z)$用(1.2)，有

$$u(rr_n e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}u(r_n e^{it})dt,\quad 0\leqslant r<1.$$

令 $n\to\infty$取极限，使得

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}f(t)dt,\quad 0\leqslant r<1.$$

(2) 由于$L^1[-\pi,\pi]$可以连续嵌入到$M[-\pi,\pi]$，而$M[-\pi,\pi]$

的前对偶空间$C[-\pi,\pi]$是可分的。因此(1)的推理可类似进行而推出(2)的结果。

Poisson核具有下列三条性质：

(1) $P_r(t)\geqslant 0$；

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\mathrm{d}t=1$；

(3) $\sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}P_r(t)\to 0\quad(r\to 1)$。

(1),(2)比较显然，我们来看(3)。由于

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\leqslant\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\quad(\delta\leqslant|t|\leqslant\pi),$$

而$1-2r\cos\delta+r^2$在$r=\cos\delta$时达到最小，故

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\leqslant\frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta}\quad(\delta\leqslant|t|\leqslant\pi),$$

从而得到(3)。

定理1.2 (1) 若$f\in L^p[-\pi,\pi]$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,$u$是$f$的Poisson积分，$u=P(f)=P_r*f$，则$u(z)=u(re^{i\theta})$是$\boldsymbol{D}$的调和函数，且当$1\leqslant p<\infty$时，

$$\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant r<1,$$

而当$p=\infty$时，

$$|u(z)|\leqslant\|f\|_\infty.$$

(2) 若$\mu\in M[-\pi,\pi]$，$u=P(\mu)$，则u在$\boldsymbol{D}$调和，且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}|\mu|(t),\quad 0\leqslant r<1.$$

证明 由于$P_r(t)$是解析函数的实部，因此是调和函数，从而易证u是调和函数。不等式的证明只要用Minkowski不等式并注意到Poisson核的性质(1)即可。

定理1.3 设 f 以 2π 为周期，$u=P(f)$，则

(1) 当 $f\in L^p(\boldsymbol{T})$时，$1\leqslant p<\infty$，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})-f(t)|^p dt\to 0\quad (r\to 1);$$

(2) 当 $f\in C[-\pi,\pi]$时，有

$$u(re^{it})\to f(t)\quad (r\to 1)$$

即 u 在 $t\in[-\pi,\pi]$ 上一致收敛。

证明　由于

$$u(re^{\theta})-f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta-t)-f(\theta)]P_r(t)dt,$$

用 Minkowski 不等式，得

$$\|u(re^{i\cdot})-f\|_p\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(\cdot-t)-f\|_p P_r(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\quad=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

对任意固定的 δ，有

$$\mathrm{II}\leqslant 2\|f\|_p\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}P_r(t)dt\to 0\quad (r\to 1).$$

而$\|f(\cdot-t)-f\|_p\leqslant\omega_p(f,t)$，其中 $\omega_p(f,t)$表示 f 的 L^p 连续模。由实变函数论知$\omega_p(f,t)\to 0(t\to 0)$，故可取 δ 充分小，使$\omega_p(f,t)<\varepsilon/2$，只要$|t|<\delta$。于是

$$\mathrm{I}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)dt=\varepsilon/2.$$

注意，在这个证明中，当 $p=\infty$时，把L^∞ 范数代之以$C[-\pi,\pi]$范数，便可得(2)的结果。

从证明中看出，若用任何恒等逼近核K_a代替 Poisson 核，则定理的结论仍然成立。所谓恒等逼近核，是指 $K_a(t)$以 2π 为周期，满足：

(1) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_a(t)|\mathrm{d}t\leqslant C$, C 与 a 无关；

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_a(t)\mathrm{d}t=1$；

(3) $\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|K_a(t)|\mathrm{d}t\to 0 \quad (a\to a_0)$。

这时，当 $f\in L^p(\boldsymbol{T})$ 或 $C(\boldsymbol{T})$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_a(x-t)f(t)\mathrm{d}t\to f(x) \quad (a\to a_0)$$

对 L^p 范数或 C 范数成立。

下面考虑 Poisson 积分的逐点收敛。

定理1.4 设 $\mu\in M[-\pi,\pi]$，$F(\theta)=\int_0^{\theta}\mathrm{d}\mu(t)$，$u=P(\mu)$，则在 $F'(\theta)$ 存在的点 θ_1，有

$$u(re^{i\theta})\to F'(\theta_1), \quad 当\ re^{i\theta}\xrightarrow{\text{N.T.}}e^{i\theta_1},$$

其中 $z\xrightarrow{\text{N.T.}}e^{i\theta_1}$ 是指非切向极限，即 $z=re^{i\theta}\to e^{i\theta_1}$，且对任意 $C>0, z\in\{re^{i\theta}\,|\,|\theta-\theta_1|<C(1-r)\}$，也就是说，$z$ 在任一个以 $e^{i\theta_1}$ 为顶点的角形区域内趋向于 $e^{i\theta_1}$。

证明 不妨设 $\theta_1=0, F'(\theta_1)=0$（否则考虑用 $\mathrm{d}\mu(t)-F'(0)\mathrm{d}t$ 代替 $\mathrm{d}\mu(t)$）。我们要证明，只要 r 充分接近于1，且 $|\theta|<C(1-r)$，有 $|u(re^{i\theta})|$ 任意小。事实上，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|t|<\delta$ 时，$|F(t)|<\varepsilon|t|$。不妨设 $|\theta|<\delta/4$，且 $C(1-r)<\delta/4$。这时

$$\begin{aligned}u(re^{i\theta})&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\mathrm{d}\mu(t)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\\&=\mathrm{I}+\mathrm{II},\end{aligned}$$

$$|\text{II}|\leqslant\sup_{\delta/2\leqslant|t|\leqslant\pi}P_r(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}|\mu|(t)\to 0\quad(r\to 1).$$

不妨设 $\theta\geqslant 0$。这时

$$\text{I}=\frac{1}{2\pi}F(t)P_r(\theta-t)\Big|_{-\delta}^{\delta}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{(1-r^2)r\sin(t-\theta)}{(1-2r\cos(\theta-t)+r^2)^2}F(t)\mathrm{d}t.$$

右边第一项显然也被 $\sup\limits_{\delta/2\leqslant|t|\leqslant\pi}P_r(t)$ 控制．我们把第二项的积分分成三部分进行估计：$\int_{-\delta}^{0}+\int_{0}^{2\theta}+\int_{2\theta}^{\delta}$．对第一个积分，由于 $|F(t)|\leqslant\varepsilon|t|=\varepsilon(-t)\leqslant\varepsilon(\theta-t)$，故

$$\left|\int_{-\delta}^{0}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{0}\frac{(1-r)^2r\sin(\theta-t)}{(1-2r\cos(\theta-t)+r^2)^2}(\theta-t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+\delta}\frac{(1-r)^2r\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}t\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{(1-r)^2r\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}t\mathrm{d}t=\varepsilon.$$

对第二个积分

$$\left|\int_{0}^{2\theta}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{0}^{2\theta}\frac{(1-r)(1+r)r\cdot\theta}{(1-r)^4}t\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{8\theta^3\varepsilon}{\pi(1-r)^3}\leqslant\frac{8C^3}{\pi}\varepsilon.$$

对第三个积分，应用条件 $|F(t)|<\varepsilon t$，便可化归第一个积分一样的估计。定理 1.4 获证。

推论1.1 若 $f\in L(\boldsymbol{T})$，则对几乎所有的 $\theta\in[-\pi,\pi]$，当 $z\xrightarrow{\text{N.T}}e^{i\theta}$ 时，$u(z)\to f(\theta)$。

证明 只需取 $\mathrm{d}\mu(t)=f(t)\mathrm{d}t$，用定理1.4，知当 $z\xrightarrow{\text{N.T}}e^{i\theta}$ 时，

$u(z)\to f(\theta)$在f的Lebesgue点成立。证毕。

我们简称推论中的u，具有几乎处处的非切向边值。

定理1.5(Fatou) 若u是$\boldsymbol{D}$的有界调和函数，则u几乎处处有非切向边值。

证明 只要结合定理1.1的(1)和推论1.1，便得所要求的结果。证毕。

总结一下本节的主要结果。若$\boldsymbol{D}$内的调和函数u，对$1\leqslant p\leqslant\infty$，满足

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})|^p d\theta<\infty,$$

则当$1<p\leqslant\infty$时，u是某个L^p函数的Poisson积分，从而它具有L^p意义的边值与几乎处处有非切向边值；当$p=1$时，u是有限Borel测度的Poisson积分，具有几乎处处的非切向边值（这是因为当$\mu\in M[-\pi,\pi]$时，$F(t)=\int_0^t d\mu$是有界变差函数，因而几乎处处可微）。值得提醒的是，当$p=1$时，我们得不到u是某个$f\in L(\boldsymbol{T})$的Poisson积分的结论。

§2.2 下调和函数

设$\Omega\subset\boldsymbol{C}$是开区域，$v(z):\Omega\to[-\infty,\infty)$是定义在$\Omega$的实值函数。通常，我们说$v(z)$在$\Omega$是上半连续的，如果对任意$t\in\boldsymbol{R}$，$\{z\in\Omega\,|\,v(z)<t\}$是开集。容易看出，$v(z)$在$\Omega$上半连续，当且仅当对任意$z_0\in\Omega$，$\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}v(z)\leqslant v(z_0)$。由此可见，上半连续是可以逐点定义的，故可把上半连续的概念推广到紧集上。不难证明，若$v(z)$在紧集K上上半连续，则$v(z)$在K上有上界，且$v(z)$在K上达到其最大值。

定义2.1 设$\Omega\subseteq\boldsymbol{C}$是开区域。我们称$v$在$\Omega$是下调和的，如果

$$v(z):\Omega\to[-\infty,\infty)$$

满足：

(1) v 在Ω 上半连续；

(2) 对任意 $z_0\in\Omega$，存在 $r(z_0)>0$,使得

$$D(z_0,r(z_0))=\{z\in\mathbf{C}:|z-z_0|<r(z_0)\}\subset\Omega,$$

且当 $0<r<r(z_0)$时，

$$v(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

结合(1)与(2)知，当 $v(z)$在Ω下调和时，

$$v(z_0)=\overline{\lim_{z\to z_0}}v(z).$$

为了讨论下调和函数的性质，我们需要一个关于上半连续函数的引理。

引理2.1 v 在Ω上半连续，当且仅当对任意紧集 $K\subset\Omega$，存在 $u_j\in C(K)$，使得 u_j 在K 单调下降趋向于v .

证明 设对任意紧集 $K\subset\Omega$，存在 $u_j\in C(K)$，使得 u_j 在K 单调下降趋向于v . 对任意 $z_0\in\Omega$，取 $K=\overline{D(z_0,r)}\subset\Omega$，这时 $\{z|z\in D(z_0,r)，u_j(z)<t\}$是开集，故 $\{z|z\in D(z_0,r),v(z)<t\}$ $=\bigcup_j\{z|z\in D(z_0,r),u_j(z)<t\}$也是开集，即 v 在 z_0 上半连续，从而在Ω上半连续。

反过来，设 v 在Ω上半连续，任意紧集$K\subset\Omega$。对任意 $\varepsilon>0$，存在K 的有限覆盖 $B(z_j,\varepsilon),j=1,2,\cdots,k$。构造单位分解

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(z)=1,\quad z\in K,$$

其中 $\varphi_j(z)$ 连续，$\varphi_j(z)\geqslant0$，$\operatorname{supp}\varphi_j\subset B(z_j,\varepsilon)$。记 $m_j=\sup\limits_{B(x_j,\varepsilon)}v(z),\psi(z)=\sum\limits_{j=1}^{k}m_j\varphi_j(z)$。令 $\varepsilon=\dfrac{1}{m},m=1,2,\cdots$，则对应

的有$\psi_m(z)$。由v的上半连续性，不难证明$\lim_{m\to\infty}\psi_m(z)=v(z)(z\in K)$。取$u_1=\psi_1,u_2=\min(u_1,\psi_2),\cdots,\ u_m=\min(u_{m-1},\psi_m)$，便得$u_m(z)$在$K$单调下降并趋向于$v(z)$。证毕。

定理2.1 若v在Ω下调和，$v\not\equiv\text{const}$，则v不可能在Ω内达到最大值。

证明 用反证法。 如果不然，设$v(z)$在$z_0\in\Omega$达到最大值m。则当r充分小时，有

$$m=v(z_0)\leqslant\frac{1}{|D(z_0,r)|}\int_{D(z_0,r)}v(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant m.$$

因此$v(z)$在$D(z_0,r)$的一个稠密集上等于m。用下调和条件$v(z)=\overline{\lim_{\zeta\to z}}v(\zeta)$知$v(z)$在$D(z_0,r)$恒等于$m$。故$A=\{z|\in\Omega:\ v(z)=m\}$是开集。而按定义$B=\Omega\setminus A=\{z|\in\Omega:v(z)<m\}$也是开集。于是，单连通开集$\Omega$可表为两开集$A$与$B$的并：$\Omega=A\cup B$，这是不可能的。定理2.1获证。

定理2.2 设Ω是$\mathbf{C}$的有界域，$v:\ \overline{\Omega}\to[-\infty,\infty)$在$\overline{\Omega}$上半连续，在$\Omega$下调和，$v\not\equiv\text{const}$，则$v$必在且仅在$\Omega$的边界$\partial\Omega$达到最大值。

证明 这是紧集上上半连续函数的性质与定理2.1的一个显然推论。

定理2.3 设v在Ω上半连续，则v在Ω下调和的充分必要条件是对任意有界域$G\subset\Omega$，任意在G调和、在$\overline{G}$连续的调和函数$u(z)$，如果在∂G上有$u(z)\geqslant v(z)$，则$u(z)\geqslant v(z)$在G也成立。

证明 *必要性* 由于调和函数是下调和的，因此，由定理2.2，便可由$v(z)-u(z)\leqslant 0(\partial G)$推出$v(z)-u(z)\leqslant 0(G)$。

充分性 对任意$z_0\in\Omega$，有$D(z_0,r)\subset\Omega$。由v上半连续，知存在单调下降序列$u_j(z)\in C(\partial D(z_0,r))$，使得$u_j(z)\to v(z)$ $(\partial D(z_0,r))$。不妨设$u_j(z)$已调和开拓到$D(z_0,r)$。由定理2.2知

$$u_j(z)\geqslant v(z)\qquad (z\in D(z_0,r)),$$

$$u_j(z)\geqslant u_{j+1}(z)\quad (z\in D(z_0,r)).$$

故

$$v(z_0)\leqslant\lim_{j\to\infty} u_j(z_0)=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_j(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{j\to\infty} u_j(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(z_0+re^{i\theta})d\theta,$$

这就证明了 $v(z)$在Ω是下调和的。

定理2.4 若 v 在 $D(0,R)\subset \boldsymbol{C}$是下调和的，则

$$m(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})d\theta$$

是 r 的单调上升函数。

证明 设$0\leqslant r_1<r_2\leqslant R$。设$u_j$是在 $\partial D(0,r_2)$上的连续函数单调下降序列，且 $u_j\to v$。不妨设 u_j 已调和开拓至 $D(0,r_2)$。这样

$$m(r_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r_1e^{i\theta})d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_j(r_1e^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_j(r_2e^{i\theta})d\theta$$

$$\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r_2e^{i\theta})d\theta=m(r_2)\quad(j\to\infty).$$

细心检查本节的推理，不难发现，至此为止，所有推理都可平行地推广到$\boldsymbol{R}^n$中，因此相应的结果在 $\boldsymbol{R}^n$ 也成立。

定理2.5(Jensen公式) 设 $F(z)$在 $D(0,R)$解析，$F(0)\neq 0$，$0<r<R$，$z_1,z_2,\cdots,z_n$是$F(z)$在$\overline{D(0,r)}$的全体(单 重)零点，则

$$\log|F(0)|+\sum_{i=1}^{m}\log\frac{r}{|z_i|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{it})|dt.$$

证明 设 $z_1,\cdots,z_m\in D(0,r)$，而$|z_{m+1}|=\cdots=|z_n|=r$。令

$$G(z)=F(z)\prod_{j=1}^{m}\frac{r^2-z\bar{z}_j}{r(z-z_j)}\prod_{j=m+1}^{n}\frac{z_j}{z-z_j}.$$

不难看出，G在$D(0,r+\varepsilon)$解析，无零点(对某个充分小的$\varepsilon>0$)。因此$\log|G(z)|$在$D(0,r+\varepsilon)$调和。故

$$\log|G(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|G(re^{it})|dt,$$

即

$$\log|F(0)|+\sum_{j=1}^{m}\log\frac{r}{|z_j|}=\log|F(0)|+\sum_{j=1}^{n}\log\frac{r}{|z_j|}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(re^{it})|dt$$

$$+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{1}{|1-e^{i(t-t_j)}|}dt.$$

剩下来只需要证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|1-e^{it}|dt=0 \tag{2.1}$$

便足够了，因为上式右边和号后的每一项，经平移后都可化为这个积分。

事实上，$1-z$在$D(0,1)$解析，无零点，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|1-re^{it}|dt=0\quad(0<r<1). \tag{2.2}$$

注意，当$|t|<\pi/3$时，

$$|\log|1-re^{it}||=\log\frac{1}{|1-re^{it}|}=\log\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos t}}$$

$$\leqslant\log\frac{1}{|\sin t|}\in L\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right],$$

而当$\pi/3\leqslant t\leqslant\pi$时，$\sqrt{3}/2\leqslant|1-re^{it}|\leqslant 2$，即

$$|\log|1-re^{it}||\leqslant\log 2.$$

在(2.2)中令$r\to 1$，用Lebesgue控制收敛定理便得(2.1)。从而定理2.5获证。

引理2.2(Jensen 不等式) 设$\varphi(u)$在$a\leqslant u\leqslant b$是凸函数，当$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$时，$a\leqslant f(t)\leqslant b$，$p(t)\geqslant 0$，但$p(t)\not\equiv 0$，则

$$\varphi\left(\frac{\int_\alpha^\beta f(t)p(t)\mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta p(t)\mathrm{d}t}\right)\leqslant\frac{\int_\alpha^\beta\varphi(f(t))p(t)\mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta p(t)\mathrm{d}t}.$$

证明 令

$$\gamma=\int_\alpha^\beta f(t)p(t)\mathrm{d}t\bigg/\int_\alpha^\beta p(t)\mathrm{d}t.$$

显然$a\leqslant\gamma\leqslant b$。

先设$a<\gamma<b$。由φ是凸函数，知存在k，使得当$a\leqslant u\leqslant b$时，

$$\varphi(u)-\varphi(\gamma)\geqslant k(u-\gamma).$$

以$u=f(t)$代入，两边乘以$p(t)$，积分得

$$\int_\alpha^\beta\varphi(f(t))p(t)\mathrm{d}t-\varphi(\gamma)\int_\alpha^\beta p(t)\mathrm{d}t$$

$$\geqslant k\left(\int_\alpha^\beta f(t)p(t)\mathrm{d}t-\gamma\int_\alpha^\beta p(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$=0,$$

这就是引理所要求证明的结论。

再设$\gamma=b$，即

$$\int_\alpha^\beta[b-f(t)]p(t)\mathrm{d}t=0,$$

从而推出$f(t)=b$在$p(t)\neq 0$的点几乎处处成立。这时，要证明的不等式化为$\varphi(b)=\varphi(b)$，结果得证。同理对$\gamma=a$，可证得所需结

果。

定理2.6 设 v 是Ω的下调和函数，φ是 $\boldsymbol{R}$ 的单调上升的凸函数，则 $\varphi(v(z))$是 Ω 的下调和函数。

证明 定义$\varphi(-\infty)=\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t)$，因此 $\varphi(v(z))$在 Ω 永远有定义。记$\varphi\circ v(z)=\varphi(v(z))$。先证 $\varphi\circ v$下半连续。因$(\varphi\circ v)^{-1}([-\infty,t))=v^{-1}\circ\varphi^{-1}([-\infty,t))$。由 φ 单调连续知，$\varphi^{-1}([-\infty,t))=[-\infty,s)$ 或 $\varphi^{-1}([-\infty,t))=\varnothing$。再由 v 的下调和性知 $v^{-1}\circ\varphi^{-1}([-\infty,t))$是开集，即$\varphi\circ v$下半连续。对任意$z_0\in\Omega$，用 Jensen不等式

$$\varphi(v(z_0))\leqslant\varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(z_0+re^{it})dt\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(v(z_0+re^{it}))dt,$$

这就证明了定理2.6。

定理2.7 设$F(z)$在$\boldsymbol{D}$解析，$0\leqslant r<1$，记

$$m_0(F,r)=\exp\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt,$$

$$m_p(F,r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^p dt\right)^{1/p},\quad 0<p<\infty,$$

$$m_\infty(F,r)=\sup_t|F(re^{it})|,$$

则 $m_p(F,r)(0\leqslant p\leqslant\infty)$是 r 的单调上升函数。

证明 由于$\log|F(z)|$是取值在$[-\infty,\infty)$的连续函数，而用 Jensen 公式，知

$$\log|F(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(z_0+re^{it})|dt$$

成立，即 $\log|F(z)|$是 $\boldsymbol{D}$ 的下调和函数。注意到$\log^+|F(z)|$是$\max(u,0)$与$\log|F(z)|$的复合，而$|F(z)|^p$是e^{pt}与$\log|F(z)|$的复

合，用定理2.6和定理2.4知定理2.7对 $0\leqslant p<\infty$成立。$p=\infty$ 的情形是解析函数最大模原理的推论。

§2.3 经典H^p空间

定义3.1 设$0<p\leqslant\infty$。我们定义$H^p(\boldsymbol{D})$由全体满足下述条件的在$\boldsymbol{D}$解析的函数$F(z)$组成：

$$\|F\|_{H^p}=\sup_{0\leqslant r<1} m_p(F,r)<\infty,$$

其中

$$m_p(F,r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^p d\theta\right)^{1/p},\quad 0<p<\infty,$$

$$m_\infty(F,r)=\sup_t|F(re^{it})|.$$

定义Nevanlinna类由全体满足下述条件的在$\boldsymbol{D}$解析的$F(z)$组成：

$$\sup_{0\leqslant r<1} m_0(F,r)<\infty,$$

其中

$$m_0(F,r)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt\right).$$

用N记 Nevanlinna 类。

H^p 与N具有以下简单性质。

(1) $H^\infty\subset H^q\subset H^p\subset N$，$0<p<q<\infty$。

(2) 若 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$，则

$$m_2^2(F,r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^2 dt=\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2 r^{2n}.$$

故$F\in H^2$，当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2<\infty$，并且

$$\|F\|_{H^2}^2=\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2.$$

(3) 当 $p\geqslant 1$时，$\|\cdot\|_{H^p}$ 是范数，它满足三角不等式

$$\|F+G\|_{H^p}\leqslant\|F\|_{H^p}+\|G\|_{H^p},$$

因而 H^p 是线性赋范空间。

当$0<p<1$时，$\|\cdot\|_{H^p}$是拟范数，即代替三角不等式，有

$$\|F+G\|_{H^p}^p\leqslant\|F\|_{H^p}^p+\|G\|_{H^p}^p.$$

我们可以通过

$$\rho(F,G)=\|F-G\|_{H^p}^p$$

定义H^p的度量，因此这时H^p是线性度量空间。

(4) 若 $F\in N$，$F(0)\neq 0$，则

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|F(re^{it})||\mathrm{d}t<\infty.$$

事实上，用Jensen公式

$$-\infty<\log F(0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(re^{it})|\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|F(re^{it})|\mathrm{d}t,$$

其中 $\log^- t=\max(-\log t,0)$。因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|F(re^{it})|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|\mathrm{d}t-\log|F(0)|,$$

故

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|F(re^{it})||\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|F(re^{it})|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt-\log|F(0)|.$$

下面我们研究H^p中函数在单位圆周的边值。根据§2.1的结果，当$p>1$时，如果解析函数$F\in H^p(\boldsymbol{D})$，则它的实部与虚部都是调和函数，满足条件

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt<\infty.$$

因此，它们在L^p意义与几乎处处意义下都有边值，从而F也有边值。当$p\leqslant1$时，我们没有这样的结果($p=1$时只有几乎处处意义下的边值)。如果这时$F(z)$在$\boldsymbol{D}$没有零点，我们考虑解析函数$F(z)^a$．它属于$H^{p/a}(\boldsymbol{D})$，只要取$a<p$，就有$\frac{p}{a}>1$，把$p\leqslant1$的情形归结到$p>1$的情形。但$F(z)$没有零点的条件太强了，一般的$F\in H^p$显然是不满足的。下面通过Blaschke乘积，把有零点的情形化归为无零点的情形。

定理3.1 设$F\in N$，$F(0)\neq0$，$z_1,z_2,\cdots,z_j,\cdots$是$F$在$\boldsymbol{D}$的全部零点，则

$$B(z)=\prod_{j=1}^{\infty}b(z,z_j)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j-z}{1-z\bar{z}_j}$$

在$|z|\leqslant r$(对任意$r<1$)一致收敛，从而$B(z)$是$\boldsymbol{D}$内的解析函数，且$|B(z)|<1(|z|<1)$，$B(z)$有且仅有零点$z_1,z_2,\cdots,z_j,\cdots$。

这里，值得指出的是，$b(z,z_j)$实际上是把$\boldsymbol{D}$变到$\boldsymbol{D}$，且把z_j变为原点的分式线性变换。另外，我们称$B(z)$为$F(z)$的Blaschke乘积。

证明 不妨设$\{z_j\}$是无限集。根据无穷乘积的理论，只需证

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|1-\frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j-z}{1-z\bar{z}_j}\right|$$

在$|z|\leqslant r$一致收敛。注意到

$$\left|1-\frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j-z}{1-z\bar{z}_j}\right|=(1-|z_j|)\left(\frac{z_j+z|z_j|}{z_j-z|z_j|^2}\right)$$

$$\leqslant(1-|z_j|)\frac{1+r}{1-r},$$

故只要证明$\sum_j(1-|z_j|)<\infty$便可。不妨设$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_j|\leqslant|z_{j+1}|\leqslant\cdots$，用Jensen公式

$$\log|F(0)|+\sum_{|z_j|\leqslant r}\log\frac{r}{|z_j|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(re^{it})|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(re^{it})|dt\leqslant M<\infty,$$

其中M与r无关。因此对任意n，有

$$\sum_{j=1}^{n}\log\frac{r}{|z_j|}\leqslant M-\log|F(0)|.$$

令$r\to1$，便得

$$\sum_{j=1}^{n}\log\frac{1}{|z_j|}\leqslant M-\log|F(0)|,$$

从而$\sum_{j=1}\log\frac{1}{|z_j|}<\infty$。于是$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|)<\infty$，定理3.1证完。

由§2.1的Fatou定理知，对几乎所有的$t\in[-\pi,\pi]$，

$$B(e^{it})=\lim_{z\xrightarrow{N.T.}e^{it}}B(z)$$

存在。

定理3.2 条件如定理3.1，则对几乎所有的$t\in[-\pi,\pi]$，有

$$|B(e^{it})|=1,$$

并且

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt=0. \tag{3.1}$$

证明 已知(3.1)左边的极限存在，这是因为积分是单调上升的。又由定义知$|B(z)|\leqslant 1$，即$\log\frac{1}{|B(re^{it})|}\geqslant 0$。用Fatou引理有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{1}{|B(e^{it})|}dt\leqslant\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{1}{|B(re^{it})|}dt,$$

即

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(e^{it})|dt\leqslant 0.$$

只要证明上式左边的极限$\geqslant 0$，则定理的结论全部得到。事实上，令

$$B_n(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j-z}{1-z\bar{z}_j}.$$

对任意固定的n，有$|B_n(e^{it})|=1$，且当$r\to 1$时，

$$|B_n(re^{it})|\to 1,\ 对t\in[-\pi,\pi]一致。$$

故

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt=\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{|B(re^{it})|}{|B_n(re^{it})|}dt.$$

但

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{|B(re^{it})|}{|B_n(re^{it})|}dt\geqslant\log\frac{|B(0)|}{|B_n(0)|}$$

$$=\sum_{j=n+1}^{\infty}\log|z_j|.$$

在前一定理的证明中已知$\sum_{j=1}^{\infty}\log|z_j|$收敛，即$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\log|z_j|=0$。从而

$$\lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt\geqslant0.$$

定理3.2证完.

定理3.3（$H^p(\boldsymbol{D})$分解定理） 对任意$F\in H^p(\boldsymbol{D})$，$0<p\leqslant\infty$，有下列分解成立

$$F(z)=G(z)B(z),$$

其中$|B(z)|\leqslant1$，$G(z)\neq0$，$G\in H^p(\boldsymbol{D})$，且

$$\|G\|_{H^p}=\|F\|_{H^p}.$$

证明 设$z=0$是$F(z)$的k重零点．$B_n(z)$如上一定理证明中所设．取$B(z)$为$F(z)$的 Blaschke 乘积

$$B(z)=z^k\prod_{j=1}^{\infty}\frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j-z}{1-z\bar{z}_j},$$

$G(z)=F(z)/B(z)$。由于当$r\to1$时，$\frac{1}{|B_n(re^{it})|}\to1$对$t\in[-\pi,\pi]$一致，故

$$\|F\|_{H^p}=\lim_{r\to1}m_p(F,r)=\lim_{r\to1}m_p\left(\frac{F}{B_n},r\right)$$

$$\geqslant m_p\left(\frac{F}{B_n},r\right).$$

当$n\to\infty$时，$F(z)/B_n(z)\uparrow G(z)$．用Lebesgue单调收敛定理，知

$$\|F\|_{H^p}\geqslant m_p(G,r),$$

从而$\|G\|_{H^p}\leqslant\|F\|_{H^p}$。另方面，显然，$|F(z)|\leqslant|G(z)|$，故$\|F\|_{H^p}\leqslant\|G\|_{H^p}$。这就证明了$\|F\|_{H^p}=\|G\|_{H^p}$。

定理3.4 设$F\in H^p$，$0<p<\infty$，则

(1) 对几乎所有的$t\in[-\pi,\pi]$，有 $\lim\limits_{z\xrightarrow{\text{N.T.}}e^{it}} F(z)=F(e^{it})$，并且 $F(e^{it})\in L^p(\boldsymbol{T})$；

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})-F(e^{it})|^p dt\to 0 \quad (r\to 1)$；

(3)
$$\|F\|_{H^p}=\lim_{r\to 1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}.$$

证明 当$p>1$时，这可由§2.1的结果推出。故只需考虑$0<p\leqslant 1$。不妨设$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$，其余的情形只需把推理作轻微的修改。

(1) 取$F(z)=G(z)B(z)=G^{1/2}(z)G^{1/2}(z)B(z)$。这时$G^{1/2}\in H^{2p}$，$2p>1$。故$G^{1/2}(z)$ a.e.有非切向边值$G^{1/2}(e^{it})\in L^{2p}$。而已知$B(z)$ a.e.有非切向边值$B(e^{it})$，且$|B(e^{it})|=1$。这就推出了所要求的结论。

(2) 取$F=F_1F_2$，$F_1=G^{1/2}$，$F_2=G^{1/2}B$。显然$F_1,F_2\in H^{2p}$，$2p>1$。由§2.1的结果，知当$r\to 1$时，$\|F_j(re^{it})-F_j(e^{it})\|_p^p\to 0$，从而$\|F(re^{it})-F(e^{it})\|_p=\|F_1(re^{it})F_2(re^{it})-F_1(e^{it})F_2(e^{it})\|_p^p\to 0$，这就是(2)所要求证明的。

(3) 由$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}$单调上升，知第一个等式是显然的。再用(2)便可推出(3)。

推论3.1 若$F(z)\in H^p$，$F(e^{it})\in L^q$，$q>p>0$，则$F\in H^q$。

证明 若$p>1$，则由§2.1的结果知$F(z)$是$F(e^{it})\in L^q$的Poisson积分，故$F(z)\in H^q$。

若$p\leqslant 1$，取$pn>1$。记$F=GB$，$G\neq 0$，$\|G\|_{H^p}=\|F\|_{H^p}$，$|B|\leqslant 1$。则$h=G^{\frac{1}{n}}\in H^{np}$，$h(e^{it})\in L^{nq}$，而$np>1$，故$h\in H^{nq}$，即$G\in H^q$，从而$F\in H^q$。证毕。

推论3.2 若$F\in H^1(\boldsymbol{D})$，则$F(z)$是它边值的Poisson积分与Cauchy积分。

证明 取$0<s<1$，则

$$F(rse^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}F(se^{it})dt.$$

令$s\to1$，由定理3.4中的(2)，$F(se^{it})\to F(e^{it})$ (L^1)，便得

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}F(e^{it})dt.$$

同理，在等式

$$F(sz)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{F(s\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

中，令$s\to1$，便知$F(z)$可表为$F(e^{it})$的Cauchy积分。证毕。

定理3.5 若$F(z)\in H^p$，$0<p<\infty$，$F(z)\not\equiv0$，则对几乎所有的$t\in[-\pi,\pi]$，有$F(e^{it})\neq0$。

证明 由$F\in H^p$知$F\in N$。不妨设$F(0)\neq0$，否则用分解定理。这时

$$\sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|F(re^{it})||dt<\infty,$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\log|F(e^{it})||dt<\infty.$$

故对几乎所有的$t\in[-\pi,\pi]$，有$F(e^{it})\neq0$。

推论3.3（唯一性） 若$F_1(z)$，$F_2(z)\in H^p$，$0<p<\infty$，且当$t\in E\subset[-\pi,\pi]$时，$F_1(e^{it})=F_2(e^{it})$，$|E|>0$，则$F_1=F_2$。

证明 只需对F_1-F_2用定理3.5。

注意，这唯一性定理是很强的。它表明，对H^p中的解析函数，它在边界的一个正测度集合上的值，便唯一地决定了它在单位圆内的值。

定理3.6(F.Riesz-M.Riesz) 若μ是$\boldsymbol{T}$上的有限Borel测度，它的负整数项的Fourier系数为0，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} d\mu(t) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

则μ对T上的Lebesgue测度是绝对连续的，即存在$f \in L^1(\boldsymbol{T})$，使得$d\mu(t) = f(t)dt$.

证明 记$F(z)$为μ的Poisson积分，即

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)} d\mu(t),$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta},$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t)$$

是μ的非负整数项的Fourier系数，满足

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t).$$

因此$F(z)$在$\boldsymbol{D}$解析．由定理1.2，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t).$$

故$F \in H^1$．令$F(e^{it}) = f(t)$，则$f \in L^1(\boldsymbol{T})$．这表明，$f$与$\mu$有相同的Fourier系数，于是$f(t)dt = d\mu(t)$．证毕．

粗略地看，$\boldsymbol{T}$上的一个有限Borel测度的绝对连续性，与它的Fourier系数的符号很难有什么联系。Riesz兄弟的这个定理却把这两者联系起来了，不能不说这是一个很深刻的结果．这结果用H^p空间的理论证明起来却十分简单．由此可见H^p空间理论的作用之一斑．

定理3.7 $H^p(\boldsymbol{D})$是可分的，$0<p<\infty$。

证明 只要证明有理系数多项式在 $H^p(\boldsymbol{D})$稠密即可。事实上，记 $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k z^k$，$F_r(z)=F(rz)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k r^k z^k$，则

$$\|F(e^{it})-F(re^{it})\|_p\to 0\ (r\to 1).$$

由定理3.4知$\|F-F_r\|_{H^p}\to 0$。取 r 接近于 1，便知$\|F_r-F\|_{H^p}$小。由 $F(z)$ 在 $\boldsymbol{D}$ 解析，知取 N 充分大，便有$\sum_{k=0}^{N}C_k r^k z^k$ 与 $F_r(z)$可一致地小。再取有理系数多项式 $\sum_{k=0}^{N}a_k r^k z^k$，它与

$$\sum_{k=0}^{N}C_k r^k z^k$$

之差一致地小。证毕。

定理3.8 H^p是完备的，$0<p<\infty$。

证明 首先证明，若$F\in H^p$，$\|F\|_{H^p}=M$，则

$$|F(z)|\leqslant M/(1-|z|)^{1/p}. \tag{3.2}$$

事实上，若 $p=1$，$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k z^k$，则

$$|C_k r^k|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|\mathrm{d}t\leqslant M,$$

令$r\to 1$，得$|C_k|\leqslant M$。从而

$$|F(z)|\leqslant M\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\leqslant M/(1-|z|).$$

若$p\neq 1$，则$F=GB$，其中$G(z)\neq 0$，$\|G\|_{H^p}=\|F\|_{H^p}$。对 G^p 用上面已证的结果，由$\|G^p\|_{H^1}\leqslant M^p$，知$|G^p(z)|\leqslant M^p/(1-|z|)$，故$|G(z)|\leqslant M/(1-|z|)^{1/p}$，从而

$$|F(z)|\leqslant|G(z)|\leqslant M/(1-|z|)^{1/p}.$$

现在设$F_n\in H^p$是Cauchy列，即$\|F_n-F_m\|\to 0(n,m\to\infty)$，我们要证它在$H^p$收敛。显然$\|F_m\|_{H^p}\leqslant M$。对任意固定的$0<R<1$，由(3.2)知$F_n(z)$在$|z|\leqslant R+\varepsilon$一致有界，从而$F_n'(z)$在$|z|\leqslant R$一致有界。因此$F_n(z)$在$|z|\leqslant R$一致有界同等连续。故有子序列$F_{n_k}$在$|z|\leqslant R$一致收敛。取$R=\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$用对角线方法，便知存在$F_n$的子序列$F_{n_k}$，它对任意$0<R<1$，在$|z|\leqslant R$一致收敛到$F(z)$。显然$F(z)$在$|z|<1$解析。令

$$\varepsilon_N=\max_{n,m\geqslant N}\|F_n-F_m\|_{H^p},$$

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(Re^{it})-F_n(Re^{it})|^p dt$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_{n_k}(Re^{it})-F_n(e^{it})|^p dt$$

$$\leqslant\varepsilon_n^{\delta}\to 0,$$

其中$\delta=\max(p,1)$。从而$\|F_n-F\|_{H^p}\to 0(n\to\infty)$。

§2.4 共轭函数与Hilbert变换，上半平面的H^p空间

定义4.1 设$f\in L^1(T)$为实值函数，$u(re^{it})$是f的Poisson积分，$v(re^{it})$是u的共轭调和函数，$v(0)=0$。定义f的共轭函数为

$$\tilde{f}(t)=\lim_{r\to 1}v(re^{it}).$$

下面证明共轭函数的存在性。不妨设$f\geqslant 0$，否则，只需分别考虑它的正部f_+与负部f_-。

定理4.1 设$F(z)$在D解析，Re $F(z)\geqslant 0$，则对几乎所有的

$t\in[-\pi,\pi]$，当$z\to e^{it}$时，$F(z)$极限存在。

证明 由于$|1+F(z)|\geqslant\mathrm{Re}(1+F(z))\geqslant 1$，知解析函数

$$G(z)=1/(1+F(z))\in H^{\infty}(\boldsymbol{D}).$$

由Fatou定理知$G(z)$几乎处处有边值，且不等于0（唯一性定理）。因此$F(z)=G(z)^{-1}-1$几乎处处有边值。证毕。

推论4.1 若$f\in L^1(\boldsymbol{T})$，则$\tilde{f}$几乎处处有意义。

定理 4.2 （M.Riesz） 若$f\in L^p$，$1<p<\infty$，则$\tilde{f}\in L^p$，且$\|\tilde{f}\|_p\leqslant C_p\|f\|_p$。

证明 证明分三步进行。

(1) 先设$1<p\leqslant 2$，$f\geqslant 0$，$f\not\equiv 0$。记$u=P(f)$，$F(z)=u+iv$在$\boldsymbol{D}$解析，$v(0)=0$。这时$u(z)>0$。我们先证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{it})|^p dt\leqslant C_p\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt. \qquad (4.1)$$

令$F(z)=|F(z)|e^{i\psi(z)}$，$|\psi(z)|\leqslant\pi/2$。这样

$$|u(z)|^p=|F(z)|^p|\cos\psi(z)|^p,$$
$$|v(z)|^p=|F(z)|^p|\sin\psi(z)|^p.$$

我们断言，存在$C_p,D_p>0$，使得

$$|\sin\theta|^p\leqslant C_p|\cos\theta|^p-D_p\cos p\theta,\qquad |\theta|\leqslant\pi/2. \qquad (4.2)$$

事实上，取$\delta>0$充分小，使得$\frac{\pi}{2}<p\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$。当$\frac{\pi}{2}-\delta\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{2}\leqslant p\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\leqslant|p\theta|\leqslant\pi$，从而，

$$\cos p\theta\leqslant\cos p\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)<0,$$

即$-\cos p\theta\geqslant-\cos p\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)>0$。这样，可取$D_p>0$充分大，使(4.2)在$\frac{\pi}{2}-\delta\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}$成立。而当$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta$时，

$$\cos\theta \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=\sin\delta>0.$$

取 $C_p>0$ 使得 $1 \leqslant C_p(\sin\delta)^p - D_p$。由此知(4.2)在$|\theta| \leqslant \pi/2$成立。

现在来看(4.1)。由(4.2)得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{it})|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^p|\sin\psi(re^{it})|^p dt$$

$$\leqslant C_p\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^p|\cos\psi(re^{it})|^p dt$$

$$-D_p\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{it})|^p\cos p\psi(re^{it})dt$$

$$=C_p\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt - D_p\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}(F(re^{it})^p)dt$$

$$=C_p\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt - 2\pi D_p\,\mathrm{Re}(F(0)^p)$$

$$\leqslant C_p\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt,$$

其中我们对$\mathrm{Re}(F(z)^p)$用了调和函数的平均值定理，以及$F(0)=u(0)>0$。

(2) 对$2 \leqslant p < \infty$，证明(4.1)式成立。我们用对偶性推理，把L^p的情形化为$L^{p'}$的情形，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，$1<p'\leqslant 2$。

设$g \in L^{p'}(\boldsymbol{T})$，则我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}v(re^{it})g(t)dt = -\int_{-\pi}^{\pi}u(re^{it})\tilde{g}(t)dt. \qquad (4.3)$$

事实上，记$h(z)=P(g)$，$\omega(z)$为$h(z)$的共轭调和函数，$\omega(0)=0$。这时

$$v(rz)h(z)+u(rz)\omega(z)=\operatorname{Im}\{(u(rz)+\mathrm{i}v(rz))(h(z)+\mathrm{i}\omega(z))\},$$

且当$z=0$时，取值为0．用调和函数的平均值定理，对$0<s<1$，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{v(rse^{\mathrm{i}t})h(se^{\mathrm{i}t})+u(rse^{\mathrm{i}t})\omega(se^{\mathrm{i}t})\}\mathrm{d}t=0.$$

令$s\to1$，由于$1<p'\leqslant2$，知 $h(se^{\mathrm{i}t})\to g(t)$ $(L^{p'})$， $\omega(se^{\mathrm{i}t})\to\tilde{g}(t)$ $(L^{p'})$，这便得到了(4.3)式．

由于

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{\mathrm{i}t})|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}=\sup_{\|g\|_{p'}\leqslant1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}v(re^{\mathrm{i}t})g(t)\mathrm{d}t\right|,$$

而

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}v(re^{\mathrm{i}t})g(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}u(re^{\mathrm{i}t})\tilde{g}(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{\mathrm{i}t})|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\|\tilde{g}\|_{p'}$$

$$\leqslant C_{p'}\|g\|_{p'}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{\mathrm{i}t})|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},$$

这就证明了(4.1)．

(3) 对$1<p<\infty$，$f\in L^p(\boldsymbol{T})$，$u=P(f)$，v是u的共轭调和函数，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{\mathrm{i}t})|^p\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\mathrm{d}t.$$

因此，存在$g\in L^p$，使得$v=P(g)$，且$v(re^{\mathrm{i}t})\to g(L^p)$．故$g=\tilde{f}$，并且$\|\tilde{f}\|_p\leqslant C_p\|f\|_p$．定理4.2获证．

值得指出的是，M.Riesz 定理 4.2 对$p=1$不成立．例如，取

$$f(t)=P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}.$$

由§2.1 Poisson核的推导过程知，它是解析函数$\frac{1+z}{1-z}$的实部，而对应的虚部便是

$$\tilde{f}(t)=Q_r(t)=\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}.$$

已知$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P_r(t)|dt=1$。容易计算

$$\int_{-\pi}^{\pi}|Q_r(t)|dt=4\log\frac{1+r}{1-r}.$$

假如$\|\tilde{f}\|_1\leq C_1\|f\|_1$成立，则令$r\to1$，便推出矛盾。

记

$$\operatorname{Re}H^p(\boldsymbol{D})=\{u\,|\,\text{存在}F(z)\in H^p(\boldsymbol{D}),\ \text{使得}u=\operatorname{Re}F\},$$
$$\|u\|_{\operatorname{Re}H^p(D)}=\|F\|_{H^p(D)},$$

其中F满足$\operatorname{Re}F=u$，$\operatorname{Im}F(0)=0$。根据定理4.2，当$1<p<\infty$时，如果把$H^p(\boldsymbol{D})$中相差一个常虚数的函数看成一个等价类，则所得的空间与$\operatorname{Re}H^p(\boldsymbol{D})$是同构的。又如果记$\operatorname{Re}L^p(\boldsymbol{T})$为实值的$L^p(\boldsymbol{T})$，则仍然根据定理4.2，它与$\operatorname{Re}H^p(\boldsymbol{D})$是同构的。我们把这事实写成下面的推论：

推论4.2 当$1<p<\infty$时，$\operatorname{Re}H^p(\boldsymbol{D})$与$\operatorname{Re}L^p(\boldsymbol{T})$是同构的Banach空间。

当$p=1$时，类似的结论并不成立。但我们有

定理4.3 $\operatorname{Re}H^1(\boldsymbol{D})$与

$$\{f\,|\in L^1(\boldsymbol{T}),\ \text{且}\tilde{f}\in L^1(\boldsymbol{T})\}$$

是同构的Banach空间，其中后者的范数定义为$\|f\|_1+\|\tilde{f}\|_1$。

证明 设$u\in\operatorname{Re}H^1(\boldsymbol{D})$，即$F(z)=u+iv\in H^1(\boldsymbol{D})$。这时，当$r\to1$时，$u\to f(L^1)$，从而$v\to\tilde{f}(L^1)$，且

$$\|u\|_{\operatorname{Re}H^1(D)}\leq C(\|f\|_1+\|\tilde{f}\|_1).$$

反之，$f\in L^1$，$\tilde{f}\in L^1$，则$P(f)+iP(\tilde{f})\in H^1(\boldsymbol{D})$。记$u=P(f)$，$v=P(\tilde{f})$。由定理3.4中(3)，有

$$\|f\|_1+\|\tilde{f}\|_1\leqslant C\|f+i\tilde{f}\|_1=C\|u+iv\|_{H^1(D)}=C\|u\|_{\mathrm{Re}H^1(D)}.$$

这定理表明，H^1与L^1是有本质差别的两个空间。$0<p<1$时，也有类似的情形。但当$1<p<\infty$时，H^p与L^p没有本质上的差别。所以今后对H^p的研究，注意力主要集中在$0<p\leqslant 1$的情形。

下面我们寻找一个通过 f 来表示 $\tilde{f}$ 的表达式。设 $u=P(f)$，v 是 u 的共轭调和函数，$v(0)=0$。注意到$Q_r(t)=\dfrac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}$是$P_r(t)$的共轭调和函数，便知

$$v(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}f(\theta-t)\mathrm{d}t. \qquad (4.4)$$

由于

$$\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}=\frac{4r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}$$

当$r\to 1$时其极限为$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\, t/2}$。我们猜想

$$\tilde{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\theta-t)}{\mathrm{tg}\, t/2}\mathrm{d}t.$$

上式右边的积分，$t=0$是奇点，我们把它理解为主值意义，则这等式的确是成立的。

定理4.4 若$f\in L^1(T)$，则对几乎所有的$\theta\in[-\pi,\pi]$，有

$$\tilde{f}(\theta)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\theta-t)}{\mathrm{tg}\, t/2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{2\mathrm{tg}\, t/2}\mathrm{d}t.$$

证明 取$\varepsilon=1-r$，当$\varepsilon\to 0+$时，$r\to 1-0$。根据$\tilde{f}$的定义，只要证明

$$\sigma_r = v(re^{i\theta}) - \frac{1}{\pi}\int_{1-r<|t|<\pi}\frac{f(\theta-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \to 0.$$

用表达式(4.4)代入，便有

$$\sigma_r = \frac{1}{\pi}\int_{|t|<1-r}\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}f(\theta-t)\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{1-r\le|t|\le\pi}\left(\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right)f(\theta-t)\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

注意到 $Q_r(t)$ 是奇核，即 $\int_{|t|<1-r}Q_r(t)\mathrm{d}t = 0$，以及 $|\sin t|\leqslant|t|\leqslant 1-r$，便知

$$|\mathrm{I}|\leqslant\frac{1}{\pi(1-r)}\int_{|t|<1-r}|f(\theta-t)-f(\theta)|\mathrm{d}t\to 0\quad(r\to 0)$$

对 a.e. $\theta\in[-\pi,\pi]$ 成立。

由于

$$\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}-\frac{1}{2\operatorname{tg}t/2}=\frac{2r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$=\cos\frac{t}{2}\frac{(1-r)^2}{2\sin\frac{t}{2}((1-r)^2+4r\sin^2 t/2)},$$

知

$$|\mathrm{II}|\leqslant C(1-r)^2\int_{1-r<|t|<\pi}\frac{|f(\theta-t)-f(\theta)|}{t^3}\mathrm{d}t.$$

记 $F(s)=\int_0^s|f(\theta-t)-f(\theta)|\mathrm{d}t$. 在 f 的Lebesgue点 θ，存在 $\delta>0$，

只要$|s|<\delta$，有$\frac{1}{s}F(s)<\varepsilon$。用分部积分，便得到

$$|\mathrm{II}|\leqslant C(1-r)^2\frac{F(\pi)}{\pi^3}$$

$$+\frac{C}{1-r}F(1-r)+3C(1-r)^2\int_{1-r}^{\pi}\frac{F(s)}{s^4}\mathrm{d}s.$$

把最后一个积分分解为两项进行估计，有

$$(1-r)^2\int_{1-r}^{\delta}\frac{F(s)}{s^4}\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon(1-r)^2\int_{1-r}^{\delta}\frac{\mathrm{d}s}{s^3}<C\varepsilon.$$

$$(1-r)^2\int_{\delta}^{\pi}\frac{F(s)}{s^4}\mathrm{d}s\leqslant\frac{(1-r)^2\pi}{\delta^4}\int_0^{\pi}|f(\theta-t)-f(\theta)|\mathrm{d}t.$$

故只要$1-r$充分小，便得$|\mathrm{II}|<C\varepsilon$。定理1.4证完。

定理4.4把$\tilde{f}$通过f的一个奇异积分表示出来，从而把H^p空间的研究同奇异积分的性质联系起来。

如果在复平面上代替单位圆盘$\boldsymbol{D}$，考虑上半平面$\boldsymbol{R}_+^2=\{z|\in\boldsymbol{C}，z=x+it，x\in\boldsymbol{R}，t>0\}$，则本章前面所讨论的内容，基本上都可以移植过来。这时，$\boldsymbol{R}_+^2$的边界是$\boldsymbol{R}$。它与圆周$\boldsymbol{T}$的区别在于，$\boldsymbol{T}$是$\boldsymbol{C}$的紧集，而$\boldsymbol{R}$则否。因此，所谓基本上是指除了一些涉及$\boldsymbol{T}$的紧性的性质(例如，常数C属于$H^p(\boldsymbol{D})$，$H^\infty\subset H^q\subset H^p$，当$q>p>0$，等）以外，前面叙述的结果，在$\boldsymbol{R}_+^2$上都是成立的。移植的方法，一种是通过从$\boldsymbol{R}_+^2$到$\boldsymbol{D}$的保角映射，把在上半空间的讨论，归结为在$\boldsymbol{D}$的研究。但注意，保角映射并不能直接把$H^p(\boldsymbol{D})$映为$H^p(\boldsymbol{R}_+^2)$。这里需要一些技巧，例如调和控制，有兴趣的读者可以参看Garnett的书[Ga]。另一种移植的方法是用类似于单位圆的推理。我们在下面只列出一些重要的概念与结果，而把细节留给读者(参阅[BS1]，[GR])去完成。

上半平面的Cauchy公式是

$$F(z)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{z-y}\mathrm{d}y.$$

记 $z=x+it$，把其中的核$\frac{i}{z-y}$写成复数的形式

$$\frac{i}{z-y}=\frac{t}{(x-y)^2+t^2}+i\frac{x-y}{(x-y)^2+t^2}.$$

自然，我们定义上半平面$\boldsymbol{R}_{+}^{2}$的Poisson 核为

$$P_t(y)=\frac{t}{y^2+t^2},$$

而共轭Poisson核为

$$Q_t(y)=\frac{y}{y^2+t^2}.$$

f 的Poisson 积分$P(f)$定义为

$$P(f)(x)=\frac{1}{\pi}P_t*f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(x-y)+t^2}f(y)\mathrm{d}t.$$

f 的共轭Poisson积分$Q(f)$定义为

$$Q(f)(x)=\frac{1}{\pi}Q_t*f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-y}{(x-y)^2+t^2}f(y)\mathrm{d}y.$$

显然，Poisson核具有§2.1所述的$P_r(t)$的三条性质。不难验证，§2.1与§2.2的全部结果都可以推广到$\boldsymbol{R}_{+}^{2}$。

我们定义$\boldsymbol{R}_{+}^{2}$的H^p“模”为

$$\|F\|_{H^p(\boldsymbol{R}_{+}^{2})}=\sup_{t>0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+it)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

从而定义 H^p 空间为

$H^p(\boldsymbol{R}_{+}^{2})=\{F(z)\,|\,$在 $\boldsymbol{R}_{+}^{2}$ 解析，且满足$\|F\|_{H^p(\boldsymbol{R}_{+}^{2})}<\infty\}$。

同单位圆的情形一样，我们在 $\boldsymbol{R}_{+}^{2}$ 可以建立 Blaschke 乘积，因而有 H^p 的分解定理，从而得知 H^p 的函数当$t\to 0$时有几乎处处意义与 L^p 范数意义下的边值 $F(x)$。

f 在 $\boldsymbol{R}_{+}^{2}$ 上的共轭函数同样可定义为f 的共轭 Poisson 积分

$$Q(f)(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}\frac{y}{y^2+t^2}f(x-y)\mathrm{d}y$$

当 $t\to 0$ 时的边值，形式地在上式取 $t=0$，便得到积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-y)}{y}\mathrm{d}y.$$

把它理解为主值积分，它就是 f 的Hilbert变换．类似于定理4.1，4.4，可以证明，当 $f\in L^1(\boldsymbol{R})$ 时，f 的共轭函数几乎处处存在，且等于 f 的 Hilbert 变换

$$H(f)(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-y)}{y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}\mathrm{d}y.$$

关于H是 L^p 到 L^p 有界的结果($1<p<\infty$)，可以从更一般的结果第一章定理3.1得到．这样，我们同样有，当 $1<p<\infty$时，$\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}^2_+)$与 $\mathrm{Re}L^p(\boldsymbol{R})$拓扑同构，而当 $p=1$ 时，$\mathrm{Re}H^1(\boldsymbol{R}^2_+)$ 拓扑同构于

$$\{f|\in L^1(\boldsymbol{R}),\ \text{且}\ H(f)\in L^1(\boldsymbol{R})\}.$$

第三章　R_+^{n+1} 上的 H^p 空间

在第二章我们已经看到解析函数在单位圆内或上半平面上的 H^p 空间理论中起到了决定性的作用。显然，所有这些概念和方法，都不容易推广到高维欧氏空间中去。为了在高维欧氏空间中建立起相应的 H^p空间理论，让我们回顾一下在建立单位圆内H^p空间理论时所采用的基本思想和方法。

设 $F(z)$是单位圆 $\boldsymbol{D}=\{z\in \boldsymbol{C}:\ |z|<1\}$内的解析函数，由下面的条件

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|^p d\theta<\infty$$

可以推出 $F(z)$满足 Blaschke 条件。利用 Blaschke 乘积便得到 $F(z)$的一个分解 $F(z)=G(z)B(z)$，其中 $B(z)$是 F 的Blaschke乘积，$G(z)$在 $\boldsymbol{D}$ 内解析且无零点，并满足

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|G(re^{i\theta})|^p d\theta=\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|^p d\theta<\infty.$$

对任意固定的 p，$0<p\leq 1$，存在充分大的整数N，使得 $Np>1$。这时 $G(z)$可以写成 $G(z)=\tilde{G}(z)^N$，其中 $\tilde{G}(z)=[G(z)]^{1/N}$是 $\boldsymbol{D}$ 内的解析函数，并且满足

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{G}(re^{i\theta})|^{Np}d\theta=\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|G(re^{i\theta})|^p d\theta<\infty.$$

注意到$Np>1$以及第二章 §2.1中所讨论的调和函数的边界性质，$\tilde{G}(re^{i\theta})$ 存在非切向边值，由此得到 $G(z)$非切向边值的存在性。再由Blaschke 乘积的性质，便可证得F存在非切向边值。

实际上，从另外一种观点也可以得到上述结果。我们知道，

若 $F(z)$ 是 $\boldsymbol{D}$ 内的解析函数，则对$0<p<\infty$，$|F(z)|^p$ 是下调和函数。我们现在不考虑解析性而仅仅把 $F(z)$ 看成 $\boldsymbol{D}$ 内的调和函数，且 $|F(z)|^p$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的下调和函数，则由条件

$$\sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|^p d\theta<\infty$$

便可推出 $F(z)$ 存在一个极小调和控制，即存在一个调和函数 $H(z)$ 使得

$$|F(z)|^p\leqslant H(z).$$

如果能够证明 $H(z)$ 存在非切向边值，则由 Fatou 定理（见本章定理1.5），可以证明 F 存在非切向边值。

这种新观点为在高维欧氏空间中建立相应的 H^p 空间理论指出了一条切实可行的途径。显然，关键在于如何推广"解析函数"概念到高维欧氏空间并证明 $|F(z)|^p$ 的下调和性。六十年代初期，E.M.Stein 与 G.Weiss 正是基于这种想法，首次在高维欧氏空间中建立了 H^p 空间理论。不过，在证明下调和性时，要求 p 充分接近于 1。即便如此，这对以后 H^p 空间理论的进一步发展仍起了关键性的作用。接着，A.P.Calderón 与 A.Zygmund 应用类似的思想，推广了 E.M.Stein 与 G.Weiss 的结果，对 $0<p\leqslant1$，在高维欧氏空间中建立了完整的H^p空间理论。

本章将着重介绍 Stein-Weiss 所建立的高维欧氏空间的 H^p空间理论。

§3.1 调和函数边界性质的进一步讨论

关于 L^p 函数的 Poisson 积分，我们有下面的定理。

定理1.1 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$u$ 是 f 的 Poisson 积分，则

(a) u 的边值几乎处处存在且等于 f，即 $\lim_{t\to0}u(x,t)=f(x)$

对 $x\in \boldsymbol{R}^n$ 几乎处处成立，还有

$$\|u(\cdot,t)\|_p\leqslant\|f\|_p; \tag{1.1}$$

(b) 当$1\leqslant p<\infty$时，$\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_p\to 0(t\to 0)$；

(c) 若 f 在 $\boldsymbol{R}^n$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则当 $t\to 0$时，$u(x,t)$ 对 $x\in \boldsymbol{R}^n$ 一致收敛于 $f(x)$。

证明 (a) 几乎处处收敛可由§1.1中推论1.4得到。当$1<p\leqslant\infty$时，(1.1)是§1.1中定理1.3的直接结果，而当$p=1$时，(1.1)显然。

(b) 平均收敛可由§1.1中定理1.4得到。

(c) 由条件知，对任意 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$|y|<\delta$，就有$|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$ 对 $x\in \boldsymbol{R}^n$ 一致成立。于是

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)-f(x)| &= \left|\int_{R^n} f(x-y)P_t(y)\mathrm{d}y-f(x)\right| \\
&= \left|\int_{R^n}[f(x-y)-f(x)]P_t(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leqslant \int_{|y|<\delta}|f(x-y)-f(x)|P_t(y)\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{|y|\geqslant\delta}|f(x-y)-f(x)|P_t(y)\mathrm{d}y \\
&< \varepsilon\int_{R^n}P_t(y)\mathrm{d}y+2\|f\|_\infty\int_{|y|\geqslant\delta}P_t(y)\mathrm{d}y \\
&\leqslant \varepsilon+2t\|f\|_\infty\int_{|y|>\delta}|y|^{-(n+1)}\mathrm{d}y\to 0 \quad (t\to 0),
\end{aligned}
$$

这就是(c)所要求证明的。

定理1.2 设$u(x,t)$在 $\boldsymbol{R}^{n+1}_+$ 调和，且

$$\sup_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_p<\infty,$$

则

(a) 当$1<p\leqslant\infty$时，存在$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$使得$u$是$f$的 Poisson 积分：$u(x,t)=P_t(f)(x)$；

(b) 当$p=1$时，存在有限 Borel 测度μ，$\int_{\boldsymbol{R}^n}|d\mu|<\infty$，使得$u$是$\mu$的 Poisson 积分：$u(x,t)=P_t(\mu)(x)$。

证明 (a) 由$\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_p<\infty$，$1<p\leqslant\infty$，知存在序列$\{t_k\}$，$t_k\to 0(k\to\infty)$，使得$u(x,t_k)$ * 弱收敛于某个$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，即对任意$g\in L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}u(y,t_k)g(y)dy\to\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)g(y)dy\quad(k\to\infty).$$

对任意$x\in\boldsymbol{R}^n$，$t>0$，取$g(y)=P_t(x-y)$，便得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}u(y,t_k)P_t(x-y)dy\to\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)P_t(x-y)dy=P_t(f)(x).$$

由于$u(y,t)$在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$调和，而上式左边正是$f_k(x)=u(x,t_k)$的 Poisson 积分，它等于$u(x,t+t_k)$。当$t_k\to 0$时，$u(x,t+t_k)\to u(x,t)$。这就证明了$u(x,t)=P_t(f)(x)$。

(b) 类似于(a)，由$\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_1<\infty$，知存在有限测度$\mu$，$\int_{\boldsymbol{R}^n}|d\mu|<\infty$，使得$\mu$是$u(\cdot,t_k)$的 * 弱极限，即对任意$g\in C_0$，

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}u(y,t_k)g(y)dy\to\int_{\boldsymbol{R}^n}g(y)d\mu(y)\quad(k\to\infty).$$

取$g(y)=P_t(x-y)$便得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}u(y,t_k)P_t(x-y)dy$$

$$\to\int_{\boldsymbol{R}^n}P_t(x-y)d\mu(y)=P_t(\mu)(x).$$

类似于(a)的证明，上式左边积分等于$u(x,t+t_k)$，它趋向于$u(x,t)$，从而证得$u(x,t)=P_t(\mu)(x)$。证毕。

如果考虑调和函数非切向极大函数与非切向边值，我们还有以下的进一步的结果。

定理1.3 设$1\leqslant p\leqslant\infty$，$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$u(x,t)=P_t(f)(x)$，则

(a) $u^*(x)=\sup\limits_{|y-x|<t}|u(y,t)|\leqslant AM(f)(x)$，其中$M(f)$是$f$的Hardy-Littlewood 极大函数；

(b) 对几乎所有的$x\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$\lim_{\substack{(y,t)\to(x,0)\\|y-x|<t}} u(y,t)=f(x).$$

证明 (a) 设$|y-x|<t$，这时

$$\begin{aligned}|u(y,t)|&\leqslant C_n\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{t}{(t^2+|y-z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}|f(z)|\mathrm{d}z\\&\leqslant C_n\int_{|z-x|<2t}t^{-n}|f(z)|\mathrm{d}z\\&\quad+C_n\int_{|z-x|\geqslant 2t}\frac{t}{(t^2+|y-z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}|f(z)|\mathrm{d}z\\&=\mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

显然$\mathrm{I}\leqslant AM(f)(x)$。而

$$\mathrm{II}\leqslant C_n\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kt<|z-x|\leqslant 2^{k+1}t}\frac{t}{(t^2+|y-z|^2)^{(n+1)/2}}|f(z)|\mathrm{d}z.$$

注意到当$|z-x|\geqslant 2^kt,|y-x|<t,k\geqslant 1$时，$|y-z|\geqslant|z-x|-|x-y|\geqslant 2^{k-1}t$，因此

$$\mathrm{II}\leqslant C_n\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}t)^{-n-1}t\int_{|z-x|<2^{k+1}t}|f(z)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant C_n \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+2n+1} M(f)(x).$$

(b) 由(a)以及 Hardy-Littlewood 极大函数是(p,p)型$(p>1)$与弱$(1,1)$型，类似于§1.1中推论1.2的证明可证得(b)。

不难看出，定理1.3的结论对角锥$|x-y|<at, a>0$也成立。其证明是完全类似的。

一个R_+^{n+1}上的下调和函数，如果满足一定的条件，则存在一个极小调和控制，这个结果对建立R_+^{n+1}上的H^p空间理论起了关键作用。下面我们来证明这个结论。

定理1.4（调和控制） 设$v(x,t)\geqslant 0$，在R_+^{n+1}下调和并满足条件

$$\sup_{t>0}\int_{R^n}|v(x,t)|^q \mathrm{d}x = C^q < \infty, \quad 1\leqslant q<\infty, \tag{1.2}$$

则$v(x,t)$在R_+^{n+1}存在一个极小调和控制，即存在R_+^{n+1}上的调和函数$g(x,t)$，使得

$$v(x,t)\leqslant g(x,t), \quad 对一切(x,t)\in R_+^{n+1}, \tag{1.3}$$

且若$\tilde{g}(x,t)$是R_+^{n+1}上满足(1.3)的调和函数，则$g(x,t)\leqslant\tilde{g}(x,t)$对一切$(x,t)\in R_+^{n+1}$成立。

进一步，当$q>1$时，$g(x,t)$是某个$f\in L^q(R^n)$的Poisson积分，且$\|f\|_q\leqslant C$；当$q=1$时，$g(x,t)$是某个有限测度μ的Poisson积分，且$\int_{R^n}|\mathrm{d}\mu|\leqslant C$。

证明 我们先证明下面的不等式

$$\sup_{x\in R^n}|v(x,t)|\leqslant ACt^{-n/q}, \tag{1.4}$$

其中A只依赖于维数n。

事实上，对任意固定的$(x_0,t_0)\in R_+^{n+1}$，记$B_{t_0}=\{(x,t)\in R_+^{n+1}: |(x,t)-(x_0,t_0)|<t_0/2\}$。由$v$的下调和性知

$$|v(x_0,t_0)|^q \leqslant \frac{1}{|B_{t_0}|}\int_{B_{t_0}} |v(x,t)|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{A}{t_0^{n+1}}\int_{t_0/2}^{\frac{3}{2}t_0}\int_{R^n} |v(x,t)|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{AC^q}{t_0^n},$$

由此立即得到(1.4)。

下面我们证明，对任意固定的 $t_0>0$，考虑 $t \geqslant t_0$，则

$$\lim_{|x|^2+t^2\to\infty} v(x,t)=0。 \quad (1.5)$$

由(1.4)，我们只需证明，对 $t\in[t_0,t_1]$，当 $|x|$ 充分大时，$v(x,t)$ 可以任意小。为此，取 $r>0, r<t_0$。记 $B=\{(x,t)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ t_0-r<t<t_1+r\}$，我们有

$$\int_B v(x,t)^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{t_0-r}^{t_1+r}\int_{R^n} v(x,t)^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C^q(t_1-t_0+2r)<\infty,$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B_k} v(x,t)^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$

其中

$$B_k=\{(x,t)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ |x|\geqslant k\}\cap B.$$

对任意 $|x|\geqslant k+r, t_0<t<t_1$，存在一个以 (x,t) 为中心，r 为半径的球 S，使得 $S\subset B_k$，从而

$$v(x,t)^q \leqslant \frac{1}{|S|}\int_S v(z,\tau)^q \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \frac{C}{r^{n+1}}\int_{B_k} v(z,\tau)^q \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau,$$

这样便得到(1.5)。

我们现在可以着手构造 $v(x,t)$ 的极小调和控制函数 $g(x,t)$ 了。令

$$g_\varepsilon(x,t)=\int_{R^n}v(y,\varepsilon)P_t(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{R^n}v(x-y,\varepsilon)P_t(y)\mathrm{d}y. \tag{1.6}$$

于是

$$\int_{R^n}g_\varepsilon(x,t)^q\mathrm{d}x\leqslant\int_{R^n}v(x,\varepsilon)^q\mathrm{d}x\leqslant C^q.$$

由定理1.1中(c)还知道

$$\lim_{t\to 0}\|v(\cdot,\varepsilon)-g_\varepsilon(\cdot,t)\|_\infty=0.$$

我们来证明 $v(x,\varepsilon+t)\leqslant g_\varepsilon(x,t)$。

事实上，对任意 $\delta>0$，取 t_0 充分小，t_1,k 充分大，可使

$$v(x,\varepsilon+t)-g_\varepsilon(x,t)<\delta \tag{1.7}$$

在 $R=\{(x,t)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ |x|\leqslant k,t_0<t<t_1\}$ 的边界上成立。再由下调和函数的极值原理，知(1.7)对 $(x,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 都成立，也就是说 $v(x,\varepsilon+t)\leqslant g_\varepsilon(x,t)$ 对一切 $(x,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 成立。现在只需证明当 $\varepsilon\to 0$ 时 $g_\varepsilon(x,t)$ 存在极限且极限 $\varphi(x,t)$ 就是 $v(x,t)$ 的极小调和控制。

由(1.2)与 Banach-Alaoglu 定理，存在序列 $\{\varepsilon_k\},\varepsilon_k\to 0(k\to\infty)$，使得当 $q>1$ 时，$v(x,\varepsilon_k)$ *弱收敛于 $f\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$；当 $q=1$ 时，$v(x,\varepsilon_k)$ *弱收敛于有限测度 μ。在(1.6)等式两边令 $\varepsilon_k\to 0$，便得到

$$g(x,t)=\lim_{\varepsilon_k\to 0}g_{\varepsilon_k}(x,t)=\int_{R^n}f(y)P_t(x-y)\mathrm{d}y,\quad q>1$$

或

$$g(x,t)=\lim_{\varepsilon_k\to 0}g_{\varepsilon_k}(x,t)=\int_{R^n}P_t(x-y)\mathrm{d}\mu(y),\quad q=1.$$

显然，$g(x,t)$是调和函数，而在$v(x,\varepsilon_k+t)\leqslant g_{\varepsilon_k}(x,t)$中令$\varepsilon_k\to 0$取极限，便得到

$$v(x,t)\leqslant g(x,t).$$

$g(x,t)$的极小性由证明过程可以直接得到。

定义1.1 设$x_0\in \boldsymbol{R}^n$，我们称定义在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上的函数$u(x,t)$在x_0非切向有界，如果存在$\alpha>0,h>0$，使得

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma_\alpha^h(x_0)}|u(x,t)|<\infty,$$

其中

$$\Gamma_\alpha^h(x_0)=\{(x,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ |x-x_0|<\alpha t,0<t<h\}.$$

定义1.2 设$x_0\in \boldsymbol{R}^n$，我们称定义在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上的函数$u(x,t)$在x_0有非切向极限，如果对任意的$\alpha>0$，极限

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\Gamma_\alpha(x_0)}}u(x,t)$$

存在。

显然，若$u(x,t)$在x_0存在非切向极限，则$u(x,t)$在x_0非切向有界。一般说来，反过来是不成立的。但是对调和函数$u(x,t)$来说，在几乎处处的意义下，反过来却是成立的。这就是下面的Fatou定理。

定理1.5 (Fatou) 设$u(x,t)$在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$调和，$E\subset\boldsymbol{R}^n$，且u在E上非切向有界，则u对几乎所有的$x\in E$，存在非切向极限。

为了证明定理1.5，我们需要下面的引理。

引理1.1 设$u(x,t)$在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$连续，$E\subset\boldsymbol{R}^n$，u在E上非切向有界，则对任意固定的$\varepsilon,\alpha,h>0$，存在紧集$E_1\subset E$以及常数$M=M(\alpha,h,\varepsilon)$，使得$m(E-E_1)<\varepsilon$，而

$$|u(x,t)|\leqslant M$$

对一切$(x,t)\in\Gamma_\alpha^h(x_0)$，$x_0\in E_1$成立。

引理1.1的意义在于，在除去一个测度任意小的集合之后，u 可以在任意固定的角锥 Γ_a^h 上一致有界。

引理1.1的证明 设 a_j, h_k 为正有理数，N 是自然数。令

$$E_{N,j,k} = \{x_0 \in E: \sup_{(x,t)\in\Gamma_{a_j}^{h_k}(x_0)} |u(x,t)| < N\}.$$

显然，$E = \bigcup_{N,j,k} E_{N,j,k}$。我们要证明，对每一个固定的 $E_0 = E_{N,j,k}$，存在 $E_{00} \subset E_0$，使得 $m(E_0 - E_{00}) < \varepsilon/2^{N+j+k}$，而

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma_a^h(x_0)} |u(x,t)| < N$$

对一切 $x_0 \in E_{00}$ 成立。

对 E_0，记 $a_0 = a_j, h_0 = h_k$。由 E_0 的点几乎处处都是全密点，知对任意 $1 - \left(\frac{a_0}{a+a_0}\right)^n < \eta < 1$，存在 $\delta > 0$ 与 $E_{00} \subset E_0$，使得 $m(E_0 - E_{00}) < \varepsilon/3^{N+j+k}$，而

$$\frac{m(B(x,r)\cap E_0)}{m(B(x,r))} > \eta$$

对所有 $x \in E_{00}$ 与 $r < \delta$ 成立。

不妨设 h 很小，满足 $ha < \delta$。取 $h_1 < h$，使得 $(a+a_0)h_1 < ah$。这样，我们只要证明对任意 $x_0 \in E_{00}$，有

$$\Gamma_a^{h_1}(x_0) \subset \bigcup_{x\in E_0} \Gamma_{a_0}^{h_0}(x), \tag{1.8}$$

也就是说，E_{00} 中每一点上任意固定的角锥，都被顶点在 E_0 上而斜率相同的角锥所覆盖。

为证明(1.8)，我们用反证法。不妨设 x_0 为原点且 $x_0 \in E_{00}$，而 $\Gamma_a^{h_1}(x_0) \not\subset \bigcup_{x\in E_0} \Gamma_{a_0}^{h_0}(x)$。这意味着存在 $(x,t) \in \Gamma_a^{h_1}(x_0)$，即

$|x|<at, 0<t<h_1$，但$(x,t)\notin \bigcup\limits_{x\in E_0}\Gamma_{a_0}^{h_0}(x)$，也就是说，$B_1=\{x'\in \mathbf{R}^n:\ |x'-x|<a_0t\}$中没有$E_0$的点。这样，在$B_2=\{x\in\mathbf{R}^n:\ |x|<(a+a_0)t\}$中包含有球$B_1$而$B_1$不含有$E_0$的点。于是我们得到

$$\frac{m(B_2\cap E_0)}{m(B_2)}\leqslant\frac{C_n[(a+a_0)^n t^n-a_0^n t^n]}{C_n(a+a_0)^n t^n}$$

$$=1-\left(\frac{a_0}{a+a_0}\right)^n<\eta,$$

但是由于球B_2的半径$\leqslant(a+a_0)t<(a+a_0)h_1<ah<\delta$，而原点又是$E_0$的全密点，因此

$$\frac{m(B_2\cap E_0)}{m(B_2)}>\eta,$$

矛盾。这就证明了（1.8)。

定理 1.5 的证明 由引理 1.1，不妨设E本身就是紧集。记$\mathscr{R}=\bigcup\limits_{x_0\in E}\Gamma_a^h(x_0)$。我们只要证明，当$u$在$\mathbf{R}_+^{n+1}$调和，且在$\mathscr{R}$上$|u|\leqslant 1$时，对几乎所有的$x_0\in E$，非切向极限$\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\mathscr{R}}}u(x,t)$存在。

令

$$\varphi_m(x)=\begin{cases}u\left(x,\dfrac{1}{m}\right), & \text{当}\left(x,\dfrac{1}{m}\right)\in\mathscr{R},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$\varphi_m(x,t)$是φ_m的 Poisson 积分，记ψ_m满足

$$u\left(x,t+\frac{1}{m}\right)=\varphi_m(x,t)+\psi_m(x,t).$$

由$|\varphi_m(x,t)|\leqslant 1$，知存在$\{m_k\}$，使得$\varphi_{m_k}$弱收敛于$\varphi$，$|\varphi(x)|\leqslant 1$。从而对$(x,t)\in\mathbf{R}_+^{n+1}$，$\varphi_{m_k}(x,t)\to\varphi(x,t)$，而$\varphi(x,t)$是$\varphi$

的Poisson积分．另外，当 $m\to\infty$时，$u\left(x,t+\frac{1}{m}\right)\to u(x,t)$。因此，当 $m_k\to\infty$ 时，$\psi_{m_k}(x,t)$有极限存在，记为$\psi(x,t)$，它满足

$$u(x,t)=\varphi(x,t)+\psi(x,t).$$

因为$\varphi(x,t)$是有界函数的 Poisson 积分，由定理 1.3 知$\varphi(x,t)$在E几乎处处存在非切向边值．于是，我们只需证明$\psi(x,t)$在E几乎处处存在非切向极限．实际上，我们将证明$\psi(x,t)$ 在 E的非切向极限为0．为此，我们来构造函数$H(x,t)$，它在E上几乎处处存在非切向极限0，而在$\mathscr{R}$上它控制了$\psi(x,t)$．

记 $\mathscr{B}=\partial\mathscr{R}=\mathscr{B}_0\bigcup\mathscr{B}_+$，其中 $\mathscr{B}_0=\mathscr{B}\bigcap\{t=0\}$，$\mathscr{B}_+=\mathscr{B}\setminus\mathscr{B}_0$．我们要构造的函数$H(x,t)$将具有以下性质：

(i) $H(x,t)$在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上调和；

(ii) 在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上，$H\geqslant0$；

(iii) 在$\mathscr{B}_+$上，$H\geqslant2$；

(iv) 在E中$H(x,t)$ 几乎处处存在非切向极限0；

(v) $|\psi_m(x,t)|\leqslant H(x,t)$，$(x,t)\in\mathscr{R}$，只要$m$充分大．

实际上，取$H(x,t)=C\{P_t(\chi_{E^c})+t\}$即可．容易验证$H(x,t)$满足要求(i),(ii)与(iv)．

为证明$H(x,t)$ 满足(iii)，在$\mathscr{B}_+$上，当$t=h$时，取C充分大($C\geqslant2/h$)，则$H(x,t)\geqslant Ch\geqslant2$．在$\mathscr{B}_+$的其他部分，即$(x_0,t_0)\in\mathscr{B}_+\bigcap\{0<t<h\}$，这时$t_0=\frac{1}{a}\text{dist}(x_0,E)$．故以$x_0$为中心，$at_0$为半径的球必在$E$之外，从而

$$P_{t_0}(\chi_{E^c})(x_0)\geqslant C_n\int_{|y-x_0|<at_0}\frac{t_0}{(t_0^2+|y-x_0|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy$$

$$\geqslant C_n\frac{t_0}{(1+a^2)^{\frac{n+1}{2}}}\frac{1}{t_0^{n+1}}\int_{|y-x_0|<at}dy=C_1>0.$$

故只要取C充分大，便有(iii)成立。

最后验证$H(x,t)$满足(v)。对充分大的固定的m，用反证法。如果不然，则存在$(x',t')\in\mathscr{R}$，使得

$$|\psi_m(x',t')|\geqslant H(x',t')+\varepsilon. \tag{1.9}$$

由(iii)可知$(x',t')\notin\mathscr{B}_+$。由极值原理，存在$(x_k,t_k)\to(x_0,0)\in\partial\mathscr{R}$，使得

$$|\psi_m(x_k,t_k)|\geqslant H(x_k,t_k)+\varepsilon. \tag{1.10}$$

注意到$\varphi_m(x,t)$是φ_m的 Poisson 积分，而$\varphi_m(x)=u\left(x,\frac{1}{m}\right)$，其中$\left(x,\frac{1}{m}\right)\in\mathscr{R}$，便有

$$\lim_{k\to\infty}\psi_m(x_k,t_k)=\lim_{k\to\infty}\left[u\left(x_k,t_k+\frac{1}{m}\right)-\varphi_m(x_k,t_k)\right]$$

$$=u\left(x_0,\frac{1}{m}\right)-\varphi_m(x_0).$$

由于$x_0\in E$，而m充分大，故$\left(x_0,\frac{1}{m}\right)\in\mathscr{R}$，从而

$$\lim_{k\to\infty}\psi_m(x_k,t_k)=u\left(x_0,\frac{1}{m}\right)-\varphi_m(x_0)$$

$$=u\left(x_0,\frac{1}{m}\right)-u\left(x_0,\frac{1}{m}\right)=0,$$

与(1.10)矛盾，(v)获证。

定理 1.2 告诉我们，若调和函数$u(x,t)$满足

$$\sup_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_p<\infty,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

则u必是一L^p函数或有限测度的 Poisson 积分，从而几乎处处存在边值。自然要问，这结果对$0<p<1$是否成立？答案是否定的。

但如果把边值看作广义函数意义下的极限，却有下面的肯定的结果。

定理1.6 设$u(x,t)$在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$调和，$0<p<\infty$，

$$\sup_{t>0}\int_{\boldsymbol{R}^n}|u(x,t)|^p\mathrm{d}x<\infty,$$

则 $\lim\limits_{t\to 0}u(x,t)=f$ 在广义函数意义下成立，即存在$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，对任意$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\lim_{t\to 0}\int_{\boldsymbol{R}^n}u(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

并且，极限f唯一地决定u。

证明 只要证明$0<p<1$的情形。令$u_\delta(x,t)=u(x,t+\delta)$，有

$$\sup_{t>0}\int_{\boldsymbol{R}^n}|u_\delta(x,t)|\mathrm{d}x\leqslant\sup_{t>0}\int_{\boldsymbol{R}^n}|u(x,t+\delta)|^p|u(x,t+\delta)|^{1-p}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant CM^{1+p}\delta^{-n(\frac{1}{p}-1)}<\infty,$$

这里用到了类似于(1.4)的估计，其中

$$M^p=\sup_{t>0}\int_{\boldsymbol{R}^n}|u(x,t)|^p\mathrm{d}x.$$

由定理1.2中(b)可知，$u_\delta(x,t)=P_t(\mu_\delta)(x)$，其中$\mu_\delta$是有限测度：$\int_{\boldsymbol{R}^n}|\mathrm{d}\mu_\delta|<\infty$，并且

$$u(x,\delta)=\lim_{t\to 0}u(x,t+\delta)=\lim_{t\to 0}u_\delta(x,t)=\mu_\delta(x)$$

在＊弱拓扑意义下成立。

设$\eta>\delta>0$。记

$$u_\eta(x)=u(x,\eta)=u_\delta(x,\eta-\delta)=P_{\eta-\delta}(\mu_\delta)(x),$$

显然，它是可积函数。取 Fourier 变换

$$\hat{u}_\eta(\xi)=\hat{\mu}_\delta(\xi)\mathrm{e}^{2\pi|\xi|(\delta-\eta)}=\hat{u}_\delta(\xi)\mathrm{e}^{2\pi|\xi|(\delta-\eta)},$$

即

$$\hat{u}_\eta(\xi)e^{2\pi|\xi|\eta}=\hat{u}_\delta(\xi)e^{2\pi|\xi|\delta}.$$

令 $\psi(\xi)=\hat{u}_\delta(\xi)e^{2\pi|\xi|\delta}$，它是与 δ 无关的连续函数。由

$$\begin{aligned}\psi(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}&=\hat{u}_\delta(\xi)e^{2\pi|\xi|(\delta-t)}\\&=\hat{u}_t(\xi)=(u(\cdot,t))^\wedge(\xi),\end{aligned}\tag{1.11}$$

对任意的 t 有

$$|\psi(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}|\leqslant\int_{R^n}|u(x,t)|dx\leqslant CM^{1+p}t^{-N},$$

其中 $N=n\left(\frac{1}{p}-1\right)$。因此

$$|\psi(\xi)|\leqslant CM^{1+p}\inf\{t^{-N}e^{2\pi|\xi|t}\}\leqslant C_N|\xi|^N.$$

这就证明了 ψ 是缓增广义函数，即 $\psi\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$。由此得出存在唯一的 $f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，使得 $\psi=\hat{f}$。

在(1.11)两边令 $t\to0$，便得到

$$\hat{f}=\lim_{t\to0}(u(\cdot,t))^\wedge(\xi),$$

等价地说，在广义函数意义下，当 $t\to0$ 时，$u(x,t)$收敛于广义函数 f，这就是所要证明的。

注意到对任意 $\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$

$$\begin{aligned}\int_{R^n}u(x,t)\varphi(x)dx&=\int_{R^n}\hat{u}_t(\xi)\check{\varphi}(\xi)d\xi\\&=\int_{R^n}\psi(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}\check{\varphi}(\xi)d\xi\\&=\int_{R^n}f(x)(e^{-2\pi|\xi|t}\check{\varphi}(\xi))^\vee(x)dx,\end{aligned}$$

这说明若 $f=0$，则 $u(x,t)=0$，即 f 唯一地决定 u。

§3.2 共轭调和函数系与 R_+^{n+1} 上的 H^p 空间

为了在高维欧氏空间上建立 H^p 空间，首先需要推广解析函数的概念。在复平面的情形，$F=u+iv$ 是平面某区域的解析函数，一个等价的说法是，实函数对 (u,v) 是该区域某个实调和函数的梯度。由此有下面的定义。

定义2.1 设 $F=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 中某区域的向量值函数。我们称 F 是此区域上的 Stein-Weiss 解析函数，如果 F 是该区域上某个实调和函数的梯度。

设 $D\subseteq\boldsymbol{R}^n$，$F$ 是 D 上的 Stein-Weiss 解析函数，容易看出，这等价于说，$F=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 满足下面的所谓"广义 Cauchy-Riemann 方程"：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\tag{2.1}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$。特别地，当 $n=2$ 时，(2.1) 就是通常的 Cauchy-Riemann 方程。

Stein-Weiss 的解析函数，有时也被称为共轭调和函数系。

当 F 是 $D\subseteq\boldsymbol{R}^n$ 上的 Stein-Weiss 解析函数时，F 的范数定义为

$$|F|=\left(\sum_{j=1}^{n}|u_j|^2\right)^{1/2}.\tag{2.2}$$

本节主要讨论"上半空间" $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的 Stein-Weiss 解析函数组成的 H^p 空间。$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 的点，有时记为 (x,t)，其中 $x\in\boldsymbol{R}^n,t>0$，有时记为 (x_0,x)，其中 $x_0>0,x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$。这时广义 Cauchy-Riemann 方程是

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\tag{2.3}$$

$$i,j=0,1,\cdots,n,\quad i\neq j.$$

例 1

$$F=\left(\frac{x_0}{r^{n+1}},\frac{x_1}{r^{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{r^{n+1}}\right)$$

是 R_+^{n+1} 上的共轭调和函数系，其中 $r=\left(\sum_{j=0}^{n}x_j^2\right)^{1/2}$.

定理2.1 设 F 是 R_+^{n+1} 的共轭调和函数系，$p\geqslant\frac{n-1}{n}$，则 $|F|^p$ 是 R_+^{n+1} 的下调和函数。

证明 只要证明 $\Delta(|F|^p)\geqslant 0$ 即可。实际上我们要证明的是不等式

$$C_p|F|^{p-2}|\nabla F|^2\geqslant\Delta(|F|^p)\geqslant c_p|F|^{p-2}|\nabla F|^2,\quad(2.4)$$

其中 C_p,c_p 是仅与 p,n 有关的非负常数。

我们引入下面的记号：$F=(u_0,u_1,\cdots,u_n),G=(v_0,v_1,\cdots,v_n)$，

$$F\circ G=u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n,$$

$$F_{x_j}=\frac{\partial F}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j},\frac{\partial u_1}{\partial x_j},\cdots,\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right),$$

$$|\nabla F|^2=\sum_{j=0}^{n}|F_{x_j}|^2.$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x_j}F\cdot G=F_{x_j}\circ G+F\cdot G_{x_j},$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|F|^p)=\frac{\partial}{\partial x_j}(F\cdot F)^{p/2}=p|F|^{p-2}(F_{x_j}\cdot F),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(|F|^p)=p(p-2)|F|^{p-4}(F_{x_j}\cdot F)^2$$

$$+p|F|^{p-2}(|F_{x_j}|^2+F_{x_jx_j}\cdot F).$$

因此，

$$\Delta(|F|^p)=p|F|^{p-4}\left\{(p-2)\sum_{j=0}^{n}(F_{x_j}\cdot F)^2+|F|^2\sum_{j=0}^{n}|F_{x_j}|^2\right\}.$$

当 $p\leqslant 2$ 时

$$\Delta(|F|^p)\leqslant p|F|^{p-2}\sum_{j=0}^{n}|F_{x_j}|^2=p|F|^{p-2}|\nabla F|^2,$$

当 $p>2$ 时，利用 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\Delta(|F|^p)&\leqslant p(p-2)\left(\sum_{j=0}^{n}|F_{x_j}|^2\right)|F|^{p-2}+p|F|^{p-2}|\nabla F|^2\\&=p(p-1)|F|^{p-2}|\nabla F|^2,\end{aligned}$$

这就证明了(2.4)左边的不等式。为证(2.4)右边的不等式，只要考虑 $p<2$ 的情形。此时，我们将证明

$$\sum_{j=0}^{n}(F_{x_j}\cdot F)^2\leqslant\frac{n}{n+1}|F|^2|\nabla F|^2. \tag{2.5}$$

如果(2.5)已经证得，则有

$$\begin{aligned}\Delta(|F|^p)&\geqslant p|F|^{p-4}\left\{(p-2)\frac{n}{n+1}|F|^2|\nabla F|^2+|F|^2|\nabla F|^2\right\}\\&=p\left[1+(p-2)\frac{n}{n+1}\right]|F|^{p-2}|\nabla F|^2.\end{aligned}$$

注意到当 $\frac{n-1}{n}\leqslant p<2$ 时，$1+(p-2)\frac{n}{n+1}\geqslant 0$。取

$$c_p=p\left[1+(p-2)\frac{n}{n+1}\right],$$

即得(2.4)右边的不等式.

为了证明(2.5)，令 $\mathscr{M}=(m_{jk})$ 是满足 $\sum_{j=0}^{n}m_{jj}=0$ 的

$(n+1)\times(n+1)$实对称矩阵，并定义

$$\|\mathscr{M}\| = \sup_{|F|=1} |\mathscr{M}(F)|, \quad |||\mathscr{M}|||^2 = \sum_{j,k} |m_{jk}|^2.$$

由于$\|\mathscr{M}\|$与$|||\mathscr{M}|||$对正交变换不变，故不妨设$\mathscr{M}$是对角矩阵

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中$\sum_{j=0}^{n}\lambda_j = 0$，即 $\lambda_{j_0} = -\sum_{j\neq j_0}\lambda_j$。由 Schwarz 不等式得

$$\lambda_{j_0}^2 \leqslant n \sum_{j\neq j_0} \lambda_j^2,$$

从而

$$(1+n)\lambda_{j_0}^2 \leqslant n \sum_{j\neq j_0} \lambda_j^2 + n\lambda_{j_0}^2 = n\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^2,$$

于是

$$\sup\lambda_j^2 \leqslant \frac{n}{n+1} \sum_{j=0}^{n}\lambda_j^2,$$

即

$$\|\mathscr{M}\|^2 \leqslant \frac{n}{n+1} |||\mathscr{M}|||^2.$$

取 $m_{jk} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$，便得

$$\sum_{j=0}^{n} (F_{x_j}\cdot F)^2 \leqslant \|\mathscr{M}\|^2 |F|^2 \leqslant \frac{n}{n+1} |||\mathscr{M}|||^2 |F|^2$$

$$= \frac{n}{n+1}|F|^2|\nabla F|^2,$$

这就是(2.5)。至此定理2.1证完。

定理 2.1 中的指标$\frac{n-1}{n}$是不能改进了的，换言之，若 $p<\frac{n-1}{n}$，则存在一共轭调和函数系，使得$|F|^p$不再是下调和函数．例 1 中的 $F=\left(\frac{x_0}{r^{n+1}},\frac{x_1}{r^{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{r^{n+1}}\right)$就是如此．由简单的计算可知，$\Delta(|F|^p)=-np(n-np-1)r^{-np-2}$，当 $p<\frac{n-1}{n}$时，$\Delta(|F|^p)<0$，即 F 不是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 的下调和函数。

现在，对 $p>\frac{n-1}{n}$，我们可以定义 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的 H^p 空间了．

定义 2.2 设 $1\geqslant p>\frac{n-1}{n}$，$F=(u_0,u_1,\cdots,u_n)$ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$的共轭调和函数系．称 $F\in H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，如果

$$\|F\|_{H^p}=\sup_{t>0}\left(\int_{R^n}|F(x,t)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\infty.$$

不难看出，由$\|\cdot\|_{H^p}$定义的 H^p 是一个拟范数空间．

下面是 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$的基本定理．

定理2.2 设 $F\in H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，$\frac{n-1}{n}<p\leqslant 1$，则当 $t\to 0$ 时，$F(x,t)$在 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 几乎处处存在非切向极限，且上述极限在 L^p 意义下也成立．

证明 令 $S(x,t)=|F(x,t)|^{\frac{n-1}{n}}$．记 $q=\frac{n}{n-1}p$．由定理2.1知 $S(x,t)$是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 的下调和函数．而

$$\sup_{t>0}\int_{R^n}S(x,t)^q\mathrm{d}x=\sup_{t>0}\int_{R^n}|F(x,t)|^p\mathrm{d}x<\infty,$$

其中 $q>1$．根据定理 1.4，$S(x,t)$具有极小调和控制 $g(x,t)$，它是某个 $g\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$的 Poisson 积分．这样

$$|u_j(x,t)|^{\frac{n-1}{n}}\leqslant|F(x,t)|^{\frac{n-1}{n}}\leqslant g(x,t),\quad j=0,1,\cdots,n,$$

而由定理1.3知 $g(x,t)$ 几乎处处存在非切向边值，从而几乎处处非切向有界。根据 Fatou 定理1.3知调和函数 $u_j(j=0,1,\cdots,n)$ 在 R^n 几乎处处存在非切向极限。

注意到定理1.3，

$$|F(x,t)|^p = S(x,t)^q \leqslant g(x,t)^q$$

$$\leqslant AM(g)^q(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^n),$$

由控制收敛定理知当 $t\to 0$ 时，$F(x,t)$ 按 L^p 意义收敛到其边值。定理2.2证完。

至此，对 $\frac{n-1}{n}<p\leqslant 1$，我们有了 $H^p(R_+^{n+1})$。特别地，有了 $H^1(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$。对这样定义的 $H^1(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，上半平面 H^1 的主要结果都可以推广过来。在这里我们略述其中的两个。

例 1 中的

$$F = C_n\left(\frac{t}{r^{n+1}}, \frac{x_1}{r^{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{r^{n+1}}\right)$$

（其中 C_n 定义如 § 1.3中(3.4)，在这里加上它是为了叙述方便）是最重要的共轭调和函数系。由它可得许多其它的共轭调和函数系。事实上，一般说来，对定义在 R^n 上的 f，函数系

$$C_n\frac{x_j}{r^{n+1}} * f, \quad j=0,1,\cdots,n, \quad x_0=t$$

在 R_+^{n+1} 是共轭调和的。注意，函数系的第一个分量其实就是 f 的 Poisson 积分

$$P_t(f)(x) = C_n\frac{t}{r^{n+1}} * f(x) = C_n\int_{R^n}\frac{t}{[t^2+|x-z|^2]^{\frac{n+1}{2}}}f(z)\mathrm{d}z.$$

其它的分量正是 f 的共轭 Poisson 积分

$$Q_j(f)(x) = C_n\frac{x_j}{r^{n+1}} * f(x)$$

$$= C_n\int_{R^n}\frac{x_j - z_j}{[t^2 + |x - z|^2]^{\frac{n+1}{2}}}f(z)\mathrm{d}z. \tag{2.6}$$

通常，f 的 Poisson 积分的边值就是 f。形式地在(2.6)式中Q_j 的表达式中令 $t=0$，它化成了 f 的第 j 个 Riesz 变换

$$R_j(f)(x) = C_n\int_{R^n}\frac{x_j - z_j}{|x - z|^{n+1}}f(z)\mathrm{d}z.$$

当然，原来 Riesz 变换是用主值积分定义的，因此，$Q_j(f)$ 的边值是 $R_j(f)$这一事实还需要证明，但这可以类似于在单位圆证明共轭 Poisson 积分的边值是共轭函数一样地进行。从上面的分析可以看出，H^1 的性质与其边值的 Riesz 变换应有密切关系。

定理2.3 设 μ_0 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的有限测度，并且 $R_j(\mu_0)$，$j=1,2,\cdots,n$ 也是有限测度，则存在函数 $f_j\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$j=0,1,\cdots,n$，使得 $\mathrm{d}\mu_j(x)=f_0(x)\mathrm{d}x$，其中 $\mu_j=R_j(\mu_0)$，$j=1,2,\cdots,n$。

证明 记 $u_j(x,t)=P_t(\mu_0)(x)$，$j=0,1,\cdots,n$。显然 $F=(u_0,u_1,\cdots,u_n)$ 满足

$$\sup_{t>0}\int_R|F(x,t)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{j=0}^{n}\int_R|\mathrm{d}\mu_j|<\infty.$$

不难证明，u_j 满足 Cauchy-Riemann 方程。因此 $F\in H^1(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$。由定理2.2知 $u_j(x,t)\to f_j(x)$按 L^1 模成立，$j=0,1,\cdots,n$。这时 u_j 既是 μ_j 的 Poisson 积分，又是 $f_j\in L^1$ 的 Poisson 积分，故

$$\mathrm{d}\mu_j=f_j(x)\mathrm{d}x.$$

定理2.4 $F(x,t)=(u_0(x,t),u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t))\in H^1(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$ 的充分必要条件是存在 $f_j\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$f_j=R_j(f_0)$ $(j=1,\cdots,n)$ 使得 $u_j(x,t)=P_t(f_j)(x)$，$j=0,1,\cdots,n$。

这时还有$\|F\|_{H^1}$ 与 $\|f_0\|_1+\sum_{j=1}^{n}\|R_j(f_0)\|_1$ 是等价模。

证明 *必要性* 由 $F\in H^1$ 知存在 $f_j\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$u_j(x,t)\to f_j(x),\qquad j=0,1,\cdots,n$$

按 L^1 模成立。这时 $u_j(x,t)=P_t(f_j)(x)$。因此

$$u_j(x,t)=\int_{R^n}\hat{f}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}e^{-2\pi|y|t}dy.$$

由 $\frac{\partial u_j}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial x_j}$ 与 Fourier 变换的唯一性，得

$$-2\pi i y_j\hat{f}_0(y)e^{-2\pi|y|t}=-2\pi|y|t\hat{f}_j(y)e^{-2\pi|y|t},$$

即 $\hat{f}_j(y)=i\frac{y_j}{|y|}\hat{f}_0(y)$。这就证明了 $f_j=R_j(f_0)$，$j=1,2,\cdots,n$。

充分性 作 $u_j(x,t)=P_t(f_j)(x)$，即 $\hat{u}_j(x,t)=\hat{f}_j(x)e^{-2\pi|x|t}$。由 $f_j=R_j(f_0)$ 知 $\hat{u}_j(x,t)=i\frac{x_j}{|x|}\hat{u}_0(x,t)$，不难验证 $(u_0,u_1,\cdots,u_n)$ 满足广义 Cauchy-Riemann 方程。

从 $u_j=P_t(f)$ 易见两个模是等价的。定理2.4证完。

这定理说明，如果我们考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 上的空间

$$\{f:\ \in L^1(R^n),\ R_j(f)\in L^1(\boldsymbol{R}^n),\ j=1,2,\cdots,n\},$$

则它构成一与 $H^1(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$ 有等价模的空间。有关问题以后还将进一步讨论。值得指出的是，$f,R_j(f)\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则它们的Fourier 变换都是连续的，而 $R_j(f)^\wedge(\xi)=i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$，因此 $\hat{f}(0)=0$，即 $\int_{R^n}f(x)dx=0$。这是 $H^1(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$ 函数的"实部"边值所需满足的必要条件。

对 $p<\frac{n-1}{n}$，A.P.Calderón 与 A.Zygmund 引入高阶梯度，从而建立了 H^p 空间论。

定义2.3 如果调和函数系 $\{u_\beta\}$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}_+$ 的某个调和函数的 $k+1$ 阶梯度组成的张量，则称 $\{u_\beta\}$ 是 k 阶共轭调和函数系。

显然，前面说的 Stein-Weiss 共轭调和函数系是 0 阶共轭调和函数系。

类似地，对 $F=\{u_\beta\}$，定义模

$$|F|=\Big(\sum_\beta|u_\beta|^2\Big)^{1/2}.$$

定理2.5 (Calderón-Zygmund)　设 $F=\{u_\beta\}$是 $\boldsymbol{R}^{n+1}_+$ 上的 k 阶共轭调和函数系，则当 $p\geqslant\frac{n-1}{n+k}$时，$|F|^p$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}_+$ 的下调和函数。

设 F 是 u 的 $k+1$ 阶梯度。用类似于定理 2.1 证明中的符号与计算，有

$$\Delta(|F|^p)=p|u|^{p-4}\Big[(p-2)\sum_{j=0}^n(F_{x_j}\cdot F)^2+|F|^2\sum_{j=0}^n|F_{x_j}|^2\Big].$$

为证明定理2.5，只需证明

$$\sum_{j=0}^n(F_{x_j}\cdot F)^2\leqslant\frac{n+k}{n+2k+1}|F|^2\sum_{j=0}^n|F_{x_j}|^2. \qquad (2.7)$$

事实上，只需把(2.7)代入上式，知当$\frac{n-1}{n+k}<p\leqslant2$时，有$\Delta(|F|^p)\geqslant0$，从而证得定理2.5。

为证(2.7)，我们需要球调和展开。为书写简单起见，我们在 $\boldsymbol{R}^n$ 进行讨论。

引理2.1　设 u 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的 m 阶齐次球调和多项式，$F=\{u_\beta\}$是它的 m 阶梯度，则

$$|F|^2=\sum_\beta|u_\beta|^2=C\int_{|x|\leqslant1}u^2(x)\mathrm{d}x, \qquad (2.8)$$

其中 C 是仅与 n,m 有关的常数。进一步，如果 u' 也是 m 阶球调和多项式，则

$$F\cdot F'=\sum_\beta u_\beta u'_\beta=C\int_{|x|\leqslant1}u(x)u'(x)\mathrm{d}x. \qquad (2.9)$$

证明　(2.9)是(2.8)的极化形式，可由(2.8)直接推出。为

证(2.8)，根据 u 的齐次性，

$$\int_{|x|<1} u^2(x)\mathrm{d}x = C\int_{|x|=1} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}x,$$

再由 Green 公式，得

$$\int_{|x|=1} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}x = \int_{|x|<1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_{|x|<1} u^2(x)\mathrm{d}x = C\int_{|x|<1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}x.$$

再重复应用此式，便得(2.8)。值得指出的是，(2.8)与(2.9)式左边是与 x 无关的。

对任意调和函数 u，设 $F=\{u_\beta\}$是它的 m 阶梯度。x_0是 u 定义域中任意一点。把$u(x)$在 x_0 按球调和多项式展开。记 v 和 w 分别是其 m 阶与 $m+1$ 阶调和多项式。这时

$$\nabla^m u|_{x_0} = \nabla^m v,\quad \nabla^{m+1}u|_{x_0} = \nabla^{m+1}w.$$

不妨设 x_0 为原点，由引理2.1知

$$F\cdot F_{x_j}|_{x_0} = C\int_{|x|<1} v\frac{\partial w}{\partial x_j}\mathrm{d}x,$$

$$|F|^2|_{x_0} = C\int_{|x|<1} v^2\mathrm{d}x,$$

以及

$$\sum_{j=1}^{n}|F_{x_j}|^2 = C\int_{|x|<1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}x.$$

这样，(2.7)的证明就化为下面的问题：在假定

$$\int_{|x|<1} v^2\mathrm{d}x = \int_{|x|<1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}x = 1 \qquad (2.10)$$

的条件下，证明

$$\sum_{j=1}^{n}\left(v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2\leqslant\frac{m+n-2}{2m+n-2},$$

其中

$$v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}=\int_{|x|<1}v\frac{\partial w}{\partial x_j}\mathrm{d}x.$$

从现在开始，把 v ，$\frac{\partial w}{\partial x_j}$ 看成$L^2(B_0)$的向量，则上面的等式表明，$v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}$是 $L^2(B_0)$的内积．不难验证，把这结果用到 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$，$m=k+1$，便可得到(2.7)．

实际上，我们将证明 $\sum_{j=1}^{n}\left(v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2$的最大值是$\frac{m+n-2}{2m+n-2}$，其中 v ，$\frac{\partial w}{\partial x_j}$ 分别是m阶与 $m+1$阶球调和多项式，满足(2.10)．

记

$$I(v)=\sum_{j=1}^{n}\left(v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2.$$

先把 v 看成变量，对 v 求导数，并用 δ 记之．如果$I(v)$对某个 v 取极大值，则

$$\delta I(v)=2\sum_{j=1}^{n}\left(v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big]\cdot\delta v\equiv 0.$$

但对任意单位向量 v ，有

$$\delta(v\cdot v)=2(v\cdot\delta v)=0.$$

这说明$\sum_{j=1}^{n}\left(v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_j}$同 v 有相同的方向．因此

$$\sum_{j=1}^{n}\left(v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_j}=\lambda v.$$

显然，最大的 λ 便是 $I(v)$的最大值．

记 $v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}=\xi_j$。我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)=\lambda\left(v\cdot\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)=\lambda\xi_i,$$

故

$$\sum_{i,j}\xi_i\xi_j\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)=\lambda\sum_i\xi_i^2.$$

由齐次性，不妨设 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 满足 $\sum_i\xi_i^2=1$。因此

$$\lambda=\sum_{i,j}\xi_i\xi_j\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)=\left(\sum_i\xi_i\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2.$$

显然 $\sum_i\xi_i\frac{\partial w}{\partial x_i}$ 是 w 沿 ξ 的方向导数。记为 $\frac{\partial w}{\partial\xi}$。这样 $\lambda=\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2$。于是

$$\max_\xi\lambda=\max_\xi\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2=\max_\xi\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}\right).$$

我们需要证明的结果化为

$$M=\max_{\xi,w}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2=\frac{m+n-2}{2m+n-2},\tag{2.11}$$

其中 ξ 是单位向量，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2=1$。

由于调和函数旋转不变，不妨取 ξ 为沿 x_1 方向的单位向量．这样

$$M=\max_w\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2,$$

其中 $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2=1$。显然

$$1=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2=\int_{|x|=1} w\frac{\partial w}{\partial \nu}\mathrm{d}\sigma=(m+1)\int_{|x|=1} w^2\mathrm{d}\sigma,$$

而由齐次性，

$$(w)^2=\int_0^1 r^{n-1+2m+2}\,\mathrm{d}r\int_{|x|=1} w^2\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2m+n+2}\int_{|x|=1} w^2\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{(2m+n+2)(m+1)}.$$

故

$$M=\max_w\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2}{(m+1)(2m+n+2)(w)^2},\tag{2.12}$$

其中 w 是 $(m+1)$ 阶调和多项式. 利用特殊函数的公式(见[Ba]第239页),

$$w=\sum_{\mu=0}^{m+1} r^{m+1-\mu}\,C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}\left(\frac{x_1}{r}\right)H_\mu(x_2,\cdots,x_n),$$

其中 H_μ 是 $x_2,\cdots,x_n$ 的 μ 阶调和多项式, $C_k^\nu(x)$ 是由等式

$$(1-2xt+t^2)^{-\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^\nu(x)t^k$$

决定的特殊球多项式, $r^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$.

令

$$w_\mu=r^{m+1-\mu}\,C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}\left(\frac{x_1}{r}\right)H_\mu(x_2,\cdots,x_n).$$

由 w_μ 在单位球正交，知

$$\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2}{(w)^2}=\frac{\sum_\mu\left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x_1}\right)^2}{\sum_\mu (w_\mu)^2}\leqslant\max_\mu\frac{\left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x_1}\right)^2}{(w_\mu)^2}.\tag{2.13}$$

现固定 μ 并计算 $\left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x_1}\right)^2$ 与 $(w_\mu)^2$。

$$(w_\mu)^2=\int_{|x|<1} r^{2m+2-2\mu}\left[C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}\left(\frac{x_1}{r}\right)\right]^2 H_\mu(x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x.$$

设 H_μ^2 是规范的，即

$$\int_{x_2^2+\cdots+x_n^2=1} H_\mu^2(x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=1,$$

$$(w_\mu)^2=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x_1\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} r^{2m+2-2\mu}\left[C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}\left(\frac{x_1}{r}\right)\right]^2\rho^{2\mu+n-2}\mathrm{d}\rho,$$

其中 $\rho^2+x_1^2=r^2$。再令 $x_1=r\cos\theta$，$\rho=r\sin\theta$，得到

$$(w_\mu)^2=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{2m+n+1}\left[C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}(\cos\theta)\right]^2\sin^{2\mu+n-2}\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{(2m+n+2)}\int_0^\pi\left[C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}(\cos\theta)\right]^2\sin^{2\mu+n-2}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{(2m+n+2)}\int_{-1}^{1}\left[C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}(x)\right]^2(1-x^2)^{\mu+\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}x.$$

由 w_μ 的定义得

$$\frac{\partial w_\mu}{\partial x_1}=\left\{(m+1-\mu)\frac{x_1}{r}C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}\left(\frac{x_1}{r}\right)\right.$$

$$\left.+\left[C_{m+1-\mu}^{\mu+(n-2)/2}\left(\frac{x_1}{r}\right)\right]'\left(1-\frac{x_1^2}{r^2}\right)\right\}r^{m-\mu}H_\mu.$$

应用公式(看[Ba]第175页)

$$(1-x^2)[C_k^\nu(x)]'+kxC_k^\nu(x)=(k+2\nu-1)C_{k-1}^\nu(x),$$

我们有

$$\frac{\partial w_\mu}{\partial x_1}=(m+\mu+n-2)r^{m-\mu}C_{m-\mu}^{\mu+(n-2)/2}\left(\frac{x_1}{r}\right)H_\mu(x_2,\cdots,x_n).$$

因此

$$\left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x_1}\right)^2 = \frac{(m+\mu+n-2)^2}{2m+n}\int_{-1}^{1}[C_{m-\mu}^{\mu+(n-2)/2}(x)]^2(1-x^2)^{\mu+\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}x.$$

应用经典公式(看[Ba]第236页)

$$J_k^\nu = \int_{-1}^{1}[C_k^\nu(x)]^2(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2^{1-2\nu}\Gamma(k+2\nu)\pi}{k!(k+\nu)\Gamma^2(\nu)},$$

有

$$\frac{J_{k-1}^\nu}{J_k^\nu} = \frac{k(k+\nu)}{(k-1+\nu)(k-1+2\nu)}.$$

由(2.12)与(2.13)，结果得到

$$M = \max_{0\leqslant\mu\leqslant m+1}\frac{(m+\mu+n-2)(m+1-\mu)}{(m+1)(2m+n-2)}$$

$$= \max_{0\leqslant\mu\leqslant m+1}\frac{(m+1)^2-\mu^2+(n-3)[(m+1)-\mu]}{(m+1)(2m+n-2)}.$$

当 $n\geqslant 3$ 时，$\mu=0$ 时 M 取最大值 $\frac{m+n-2}{2m+n-2}$. 当 $n=2$ 时，$\mu=0$ 或 $\mu=1$ 都有 $M=\frac{1}{2}$. 这就证明了(2.11)，从而定理2.5得证.

利用§3.1中调和控制定理1.4与本节定理 2.2 的证明方法，便可得到

定理2.6 设 $\frac{n-1}{n+k-1}>p>\frac{n-1}{n+k}$，其中 k 是非负整数，$F=\{u_\beta\}$ 是 k 阶共轭调和函数系，且

$$\sup_{t>0}\int_{R^n}|F(x,t)|^p\mathrm{d}x<\infty, \tag{2.14}$$

则当 $t\to 0$ 时，$F(x,t)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 几乎处处存在非切向极限，并且这极

限对 L^p 模也成立。

定义 2.4 设 $\frac{n-1}{n+k-1} \geqslant p > \frac{n-1}{n+k}$. 我们称 $\boldsymbol{R}_{+}^{n+1}$ 上的 k 阶共轭调和函数系 $F=\{u_\beta\}$ 属于 $H^p(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1})$，如果 F 满足条件(2.14)。

由(2.14)左边的数所定义的 H^p 模，使 H^p 构成一伪模空间。

现在，对 $0<p\leqslant 1$，我们已建立了多元 H^p 空间。它由调和函数的高阶梯度构成，因而相当复杂，是令人不满意的。以后我们将把它大大简化。

§3.3 注释与进一步的结果

注释

n 维 Poisson 积分的 Fourier 分析的研究，已有很长的历史，有关内容可参看[B1]，[B2]与[BC]。本章 §3.1中的有关内容，许多取材于[St4]，也可参看[SW3]。关于高维的调和控制定理1.4，是 Stein-Weiss 证明的，见[SW1]。对复平面单位圆的有界调和函数，P.Fatou最早证明了其边值几乎处处存在。定理1.5是他的结果的一种局部形式的推广，在复平面单位圆的情形，最早由 Privarov 用复方法证得，见[Z]。这里给出的高维结果属于A.P.Calderón[C1]。定理1.6属于 Fefferman-Stein[FS2]，这是以后叙述的 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$的实变刻画与原子刻画的基础。

$\boldsymbol{R}_{+}^{n+1}$ 上的 H^p 空间，是由 Stein-Weiss 首先建立的。他们当时要求条件 $p>\frac{n-1}{n}$，见[SW1]，也可参看[St4]，[SW3]。定理2.3的低维情形是著名的 Riesz 兄弟定理的一个简单推论[Ri]，也可参见[Ko1]，[Z]。这里叙述的高维结果属于 Stein-Weiss [SW1]。定理2.4 也是属于他们的，这是他们建立的高维 H^1 空间的一个重要应用。它为以后 C.Fefferman 证明著明的$(H^1)^*$ = BMO 作了准备(见本书第七章)。对 $0<p\leqslant\frac{n-1}{n}$，$H^p(\boldsymbol{R}_{+}^{n+1})$

的建立属于Calderón-Zygmund[CZ4]。有关球调和多项式的一些基本知识可参看[St4]。

进一步的结果

1. 利用 H^1 空间可以推广分数次积分的 L^p 不等式，即若 $f\in H^1(\boldsymbol{R}^n)$，也就是说，存在某个 $F=(u_0,u_1,\cdots,u_n)\in H^1$，使得 $u_0=f*P_t$，则分数次积分

$$I_\alpha(f)(x)=\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_{R^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y\in L^q(\boldsymbol{R}^n),$$

且

$$\|I_\alpha(f)\|_q\leqslant A_\alpha\left(\|f\|_1+\sum_{j=1}^n\|R_jf\|_1\right)$$

$$=A_\alpha\|f\|_{H^1},$$

其中 $\frac{1}{q}=1-\frac{\alpha}{n}$，$0<\alpha<n$，$\gamma(\alpha)$ 是仅依赖于 α 与维数 n 的常数。参见[SW1]。在本书的§6.2，将给出这个结果的进一步推广。

2. 设 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$，$F=(F_1,\cdots,F_k)$，其中 $F_j\in C^1(\Omega)$，$1\leqslant j\leqslant k$，满足方程

$$\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial F}{\partial x_j}=0.\qquad(*)$$

A_j 是 $k\times n$ 阶常数矩阵。我们称上述方程是一个广义的 Cauchy-Riemann 方程，如果 F 中的每个分量 F_j 是调和函数。Stein-Weiss 以及 Calderón-Zygmund 讨论的共轭调和函数系，都是这种 F 的特例。Calderón 首先注意到，存在 $p<1$，使得

$$|F|^p=\left(\sum_{j=1}^k|F_j|^2\right)^{p/2}$$

是下调和函数，当且仅当方程(*)是椭圆方程，即

$$\sum_{j=1}^n\lambda_jA_jV=0,$$

当且仅当 $\lambda_j=0$，$j=1,2,\cdots,n$，或 $V=0$。

Stein 接着发现，每一个广义 Cauchy-Riemann 方程必定是椭圆方程。

Coifman 与 Weiss 进一步证明(参阅[CW3])，若 F 是广义 Cauchy-Riemann 方程的解，记 $F^\lambda=(F_1,\cdots,F_{k-1},\lambda F_k)$，则下述函数是下调和函数：

(i) $|F|^p$，当 $p\geqslant 2-\frac{1}{\alpha}$；

(ii) $A|F^0|^p-|F|^p$，当 $1<p\leqslant 2$ 且 $A>(p-1)^{-1}(1-\alpha)^{-1}$；

(iii) $A|F^0|^2|F^\lambda|^{p-2}-|F^\lambda|^p$，当 $2\leqslant p<\infty$，$A\geqslant\frac{p(p-1)}{1-\alpha}$

且

$$0<\lambda^2\leqslant\min\left(1,\frac{1-\alpha}{4(p-2)}\right).$$

他们对许多广义 Cauchy-Riemann 方程算出了最好的 α。

3. 例 1 表明，当 $n\geqslant 2$ 时，存在共轭调和函数系 F，使得当 $0<p<\frac{n-1}{n}$ 时，$|F|^p$ 不是下调和函数。这说明了定理2.2的推理对 $0<p<\frac{n-1}{n}$ 不能应用。对 $0<p<\frac{n-1}{n}$，能否用 Stein-Weiss 的共轭调和函数系定义 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，仍然是一个问题。也就是说，是否可以避开 $|F|^p$ 的下调和性，证明边值的存在性？最近 T. Wolff 证明了当 $n\geqslant 2$ 时，存在 $\varepsilon>0$，当 $0<p<\varepsilon$ 时，存在共轭调和函数系 $F=(u_0,u_1,\cdots,u_n)$，满足

$$\sup_{t>0}\int_{\boldsymbol{R}^n}|F(x,t)|^p dx<\infty,$$

但当 $t\to 0$ 时，F 在一正测集 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ 上没有极限。这就证明了，对 $0<p\leqslant 1$，不能统一用 Stein-Weiss 的共轭调和函数系定义 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$。同样，也不能用固定阶数的高阶共轭调和函数系统一定义 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，$0<p\leqslant 1$。Wolff 的结果，只是证明了 $\varepsilon>0$ 的

存在性。能否证明 $\varepsilon = \frac{n-1}{n}$，仍然是一个未解决的问题。类似的问题也可以对高阶共轭调和函数系提出。参看[Wo]。

值得指出的是，T.Wolff 在同一篇文章中还证明了，当 $n \geqslant 2$时，存在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上不恒等于 0 的共轭调和函数系，它 $C^\alpha(\alpha>0)$连续到边界 $\boldsymbol{R}^n$，但在 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个正测度集合上为 0。与 § 2.3中推论3.3比较，可以看出共轭调和函数系虽然可作为解析函数的高维推广，但在本质上，两者是有许多区别的。

4. 已知 H^1 空间可以用 Riesz 变换刻画，一个自然的问题是：对于怎样的算子族$\{K_1, \cdots, K_m\}$，它可以刻画 $H^1(\boldsymbol{R}^n)$，即等式

$$H^1(\boldsymbol{R}^n) = \left\{ f \mid f \in L^1(\boldsymbol{R}^n),\ \|f\|_1 + \sum_{j=1}^m \|K_j f\|_1 < \infty \right\}$$

何时成立？

1977年 S.Janson 找到了刻画 $H^1(\boldsymbol{R})$缺空间的必要充分条件，对于 $\boldsymbol{R}^n$ 而言，他只得到必要条件，见[J]。关于 H^p 缺空间可参看[L2]。1982年 Uchiyama 证明了该条件也是充分的，不过他是通过 H^1 空间的对偶空间 BMO 加以证明的[U2]。在第 9 章，我们将介绍 Janson 与 Uchiyama 的结果。进一步，Uchiyama还证明了，若算子族满足 Janson-Uchiyama 条件，则存在 $0<p_0<1$，使得该算子族也可以刻画 H^p，$p_0<p\leqslant 1$，见[U4]。

第四章　H^p空间的实变刻画

前两章建立起来的 H^p 空间，依赖于解析函数或共轭调和函数系的概念。由于定义本身的复杂性，给 H^p 空间理论的应用与进一步发展都带来了困难。人们希望把它简化。

能不能简单地用调和函数去代替解析函数或共轭调和函数系呢？具体地讲，例如，设 $u(x,t)$是 $\boldsymbol{R}_+^2$ 上的调和函数且满足

$$\sup_{t>0}\int_{R}|u(x,t)|^p\mathrm{d}x<\infty, \qquad (*)$$

能否断言 $u(x,t)$是某个 $F(z)\in H^p(\boldsymbol{R}_+^2)$的实部？

答案是否定的。例如取 $f\in L^1(\boldsymbol{R}),f>0,u(x,t)=P_t(f)(x)$，则 $u(x,t)$在 $\boldsymbol{R}_+^2$ 调和，且

$$\sup_{t>0}\int_{R}|u(x,t)|\mathrm{d}x\le\int_{R}f(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

但显然 $u(x,t)$不可能是某个 $H^1(\boldsymbol{R}_+^2)$函数的实部，因为它的边值 $f(x)$不满足 H^1 的必要条件 $\int_{R}f(x)\mathrm{d}x=0$(见第80页)。这表明，为保证调和函数是 H^p 函数的实部，需要找出比(*)更强的条件。

1971年 Burkholder，Gundy 和 Silverstein 对 $n=1$找到了这样的充分必要条件，即所谓的极大函数刻画。值得提及的是他们的证明完全采用了概率论中的方法。接着，1972年 C.Fefferman 和 E.M.Stein 把他们的结果推广到高维的情形。出乎意料的是，他们不但给出了 H^p 空间的几种等价刻画，并且进一步证明了，在建立 H^p空间理论中，调和函数也不是本质的，它完全可以通过广义函数意义下的边值用纯粹实变的特征加以刻画。他们所创立

理间的实变方法是 H^p空论进一步发展的里程碑。

本章将介绍 Burkholder-Gundy-Silverstein 的一维结果和 C. Fefferman-Stein 的 H^p空间的实变刻画。

§4.1 Burkholder-Gundy-Silverstein 定理

定理1.1 设 $F(x,t)\in H^p(\mathbf{R}_+^{n+1})$，$0<p\leqslant 1$，$u(x,t)$ 是它的实部，即是 F 的第一个分量，则

$$u^*(x)=\sup_{|y-x|<t}|u(y,t)|\in L^p(\mathbf{R}^n).$$

证明 由 §3.2中定理2.5 知存在 $p_k=\frac{n-1}{n+k}$，使得 $p_k<p\leqslant 1$，$|F|^{p_k}$是下调和函数，且满足

$$\sup_{t>0}\int_{R^n}(F(x,t)^{p_k})^{\frac{p}{p_k}}\,dx=\sup_{t>0}\int_{R^n}|F(x,t)|^p dx<\infty.$$

因此存在$|F(x,t)|^{p_k}$ 的调和控制$S(x,t)$，它是某个$f\in L^{p/p_k}(\mathbf{R}^n)$ 的 Poisson 积分，即

$$|F(x,t)|\leqslant S(x,t),\qquad S(x,t)=P_t(f)(x),\qquad f\in L^{p/p_k}.$$

由 §3.1中定理1.3知

$$S^*(x)=\sup_{|y-x|<t}S(y,t)\leqslant AM(f)(x).$$

因此 $S^*\in L^{p/p_k}$，即 $S^{*1/p_k}\in L^p$。由$|u(x,t)|\leqslant|F(x,t)|$得

$$u^*(x)\leqslant F^*(x)\leqslant S^{*1/p_k}(x),$$

故 $u^*\in L^p$。

当 $n=1$时，此定理是早就知道了的。其逆定理是否成立则是一个长期没有解决的问题，直到1970年才得到了肯定的回答。

定理1.2 (Burkhoider-Gundy-Silverstein) 设 $u(x+it)$是$\mathbf{R}_+^2$上的实值调和函数，则 u 是某个 $F(z)\in H^p(\mathbf{R}_+^2)$ 实部的充分必要条件是 $u^*\in L^p(\mathbf{R})$。

证明 必要性就是定理1.1中 $n=1$的情形．下面证明充分性．显然只需考虑 $0<p\leqslant1$ 的情形．我们采用P.Koosis的证明．设 $v(x+it)$ 是 u 的共轭调和函数，我们需要证明

$$\sup_{t>0}\int_{-\infty}^{\infty}|v(x+it)|^p\mathrm{d}x\leqslant C\|u^*\|_p^p. \tag{1.1}$$

令 $v_t(z)=v(z+it)$，$u_t(z)=u(z+it)$，$E_\lambda=\{x\in\boldsymbol{R}:\ u_t^*(x)>\lambda\}=\bigcup_i I_i$，其中$\{I_i\}$是开集 E_λ的构成区间．如图1，作围道 Γ：$\Gamma=T\cup\{\boldsymbol{R}\backslash E_\lambda\}$．

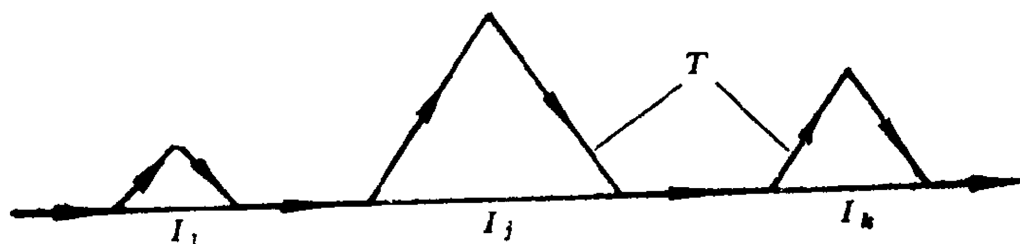


图 1

我们只需证明不等式

$$|\{x\in\boldsymbol{R}:\ |v_t(x)|>\lambda\}|\leqslant3|E_\lambda|+\frac{2}{\lambda^2}\int_0^\lambda s|E_s|\mathrm{d}s. \tag{1.2}$$

这是由于从(1.2)可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|v(x+it)|^p\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|v_t(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}|\{x\in\boldsymbol{R}:\ |v_t(x)|>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant3p\int_0^\infty\lambda^{p-1}|E_\lambda|\mathrm{d}\lambda+2p\int_0^\infty\lambda^{p-3}\int_0^\lambda s|E_s|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\lambda$$

$$=3\int_{-\infty}^\infty|u_t^*(x)|^p\mathrm{d}x+2p\int_0^\infty\left(\int_s^\infty\lambda^{p-3}\mathrm{d}\lambda\right)s|E_s|\mathrm{d}s$$

$$=3\|u^*\|_p^p+\frac{2p}{2-p}\int_0^\infty s^{p-1}|E_s|\mathrm{d}s$$

$$=\frac{8-3p}{2-p}\|u^*\|_p^p.$$

下面回到(1.2)的证明. 已知

$$|\{x\in \boldsymbol{R}:\ |v_t(x)|>\lambda\}|\leqslant|E_\lambda|+|\{x\in \boldsymbol{R}\setminus E_\lambda:\ |v_t(x)|>\lambda\}|.$$

当 t 固定时，类似于§3.1中(1.4)，我们有

$$|u_t(x)|^2=|u(x+it)|^2=|u(x+it)|^p|u(x+it)|^{2-p}$$
$$\leqslant Ct^{-\frac{2-p}{p}}|u(x+it)|^p,$$

再由 Plancherel 定理知 $[u_t(z)+iv_t(z)]^2\in H^1$，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}[u_t(z)+iv_t(z)]^2\mathrm{d}z=0.$$

用 Cauchy 定理还有

$$\int_\Gamma[u_t(z)+iv_t(z)]^2\mathrm{d}z=0.$$

在上式两边取实部

$$0=\int_{R\setminus E_\lambda}(u_t^2-v_t^2)\mathrm{d}x+\int_T(u_t^2-v_t^2)\mathrm{d}x-2\int_T u_tv_t\mathrm{d}y,$$

而

$$\left|2\int_T u_tv_t\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_T(u_t^2+v_t^2)\mathrm{d}x,$$

故

$$0\leqslant\int_{R\setminus E_\lambda}(u_t^2-v_t^2)\mathrm{d}x+2\int_\Gamma u_t^2\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_{R\setminus E_\lambda}v_t^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{R\setminus E_\lambda}u_t^2\mathrm{d}x+2\int_T u_t^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{R\setminus E_\lambda} u_t^{*2}(x)\mathrm{d}x+2\lambda^2|E_\lambda|,$$

后一不等号成立是因为当 $z\in\Gamma$时，$|u_t(z)|\leqslant\lambda$以及$\int_\Gamma \mathrm{d}x=|E_\lambda|$。

注意到

$$\int_{R\setminus E_\lambda} u_t^{*2}(x)\mathrm{d}x=2\int_0^\infty s|\{x\in\boldsymbol{R}\setminus E_\lambda:\ u_t^*(x)>s\}|\mathrm{d}s$$

$$=2\int_0^\infty s|\{x\in\boldsymbol{R}:\ \lambda\geqslant u_t^*(x)>s\}|\mathrm{d}s$$

$$=2\int_0^\lambda s|\{x\in\boldsymbol{R}:\ u_t^*(x)>s\}|\mathrm{d}s$$

$$=2\int_0^\lambda s|E_s|\mathrm{d}s,$$

便得

$$|\{x\in\boldsymbol{R}:|v_t(x)>\lambda|\}|\leqslant|E_\lambda|+|\{x\in\boldsymbol{R}\setminus E_\lambda:|v_t(x)|>\lambda\}|$$

$$\leqslant|E_\lambda|+\lambda^{-2}\int_{R\setminus E_\lambda} v_t^2\mathrm{d}t\leqslant|E_\lambda|+2|E_\lambda|$$

$$+\lambda^{-2}\int_{R\setminus E_\lambda} u_t^{*2}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant3|E_\lambda|+2\lambda^{-2}\int_0^\lambda s|E_s|\mathrm{d}s,$$

(1.2)获证，从而定理1.2证毕。

§4.2 H^p空间的极大函数刻画

定理1.2的证明用到了解析函数的 Cauchy 定理，因此无法推广到高维欧氏空间。1972年 C. Fefferman 与 Stein 得到了高维欧氏空间中 H^p空间的极大函数刻画。他们的方法是首先证明非切

向极大函数与垂直极大函数在 L^p意义下是等价的，从而可以看到，在非切向极大函数中角锥的宽度是不重要的.其次他们证明了非切向极大函数和面积积分（见第23页）在 L^p 意义下是等价的，而面积积分正是沟通复方法与实方法的重要工具．最后他们证明一个调和函数是 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ "实部" 的充分必要条件是其面积积分属于 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$．本节将介绍他们这一套实方法。

定义2.1 设$u(x,t)$是$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$的调和函数，$F(x,t)\in H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，$0<p<1$。我们称 u 是F 的 "实部"，如果 u 是F 的第一个分量（即若 F 是调和函数U 的 k 阶梯度，则 $u=\frac{\partial^k U}{\partial t^k}$）。这时，记作 $u\in \mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$。

我们需要下面的调和函数的重要性质。

引理2.1 设 B 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$中以 (x_0,t_0) 为中心的球，u 在 B 内调和，在 $\bar{B}$ 连续，则对 $0<p<\infty$，存在仅依赖于维数 n 与 p 的常数 C_p，使得

$$|u(x_0,t_0)|\leqslant C_p\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|u(x,t)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}^{1/p}.$$

证明 若 $p\geqslant 1$，则上述不等式由调和函数平均值定理与 Jensen 不等式直接得到。下面考虑 $0<p<1$。不妨设 (x_0,t_0) 为原点，B 的半径为1，且$\int_B|u(x,t)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t=1$。记

$$m_p(r)=\left(\int_{|x|^2+t^2=r^2}|u(x,t)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p},$$

$$m_\infty(r)=\sup_{|x|^2+t^2=r^2}|u(x,t)|。$$

只要证存在 $r_0<1$，使得 $m_\infty(r_0)\leqslant C_p$，其中 C_p是仅与 p,n 有关的常数。因为由此以及极值原理，$|u(x_0,t_0)|^p\leqslant C_p^p$，即$|u(x_0,t_0)|\leqslant C_p$。

不妨设 $m_\infty(r)\geqslant 1$ $(0<r<1)$。由 Hölder 不等式

$$m_1(r)\leqslant m_p(r)^{1-\theta}m_\infty(r)^\theta,$$

其中 $0<r<1$，$0<\theta=1-p<1$。通过对 Poisson 核

$$\frac{r^2-\rho^2}{(r^2-2r\rho\cos\gamma+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

的估计，易得

$$m_\infty(\rho)\leqslant A\left(1-\frac{\rho}{r}\right)^{-n}m_1(r),\qquad 0<\rho<r,$$

从而

$$m_\infty(\rho)\leqslant A\left(1-\frac{\rho}{r}\right)^{-n}m_p(r)^{1-\theta}m_\infty(r)^\theta.$$

取 $\rho=r^a$，$a>1$ 且充分接近于 1，两边先取对数，再取积分，得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\log m_\infty(r^a)\frac{dr}{r}\leqslant C_a+\theta\int_{1/2}^1\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}$$

$$+(1-\theta)\int_{1/2}^1\log m_p(r)\frac{dr}{r}.$$

由于 $\int_0^1 m_p(r)^p r dr=1$，故 $\int_{\frac{1}{2}}^1\log m_p(r)\frac{dr}{r}<\infty$。

经变量替换，我们有

$$\frac{1}{a}\int_{(\frac{1}{2})^a}^1\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}\leqslant C'_p+\theta\int_{\frac{1}{2}}^1\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}.$$

注意到 $m_\infty(r)\geqslant 1$，

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{1}{2}}^1\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}\leqslant\frac{1}{a}\int_{(\frac{1}{2})^a}^1\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}$$

$$\leqslant C'_p+\theta\int_{\frac{1}{2}}^1\log m_\infty(r)\frac{dr}{r}.$$

取 $\frac{1}{a}-\theta>0$，得

$$\int_{1/2}^{1}\log m_{\infty}(r)\frac{\mathrm{d}r}{r}<C_p'.$$

这说明存在 r_0，使得 $m_{\infty}(r_0)\leqslant C_p$.

定理2.1 设 u 在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 调和，则对 $0<p<\infty$，存在仅依赖于 p 与 n 的常数 C_p，使得

$$\|u^*\|_p\leqslant C_p\|u^+\|_p,$$

其中 u^+ 是垂直极大函数

$$u^+(x)=\sup_{t>0}|u(x,t)|.$$

由于 $u^+(x)\leqslant u^*(x)$，定理表明，u^+ 与 u^* 的 L^p 模是等价的.

定理2.1的证明 设 $(y,t)\in\Gamma(x)$，由引理2.1

$$|u(y,t)|^{p/2}\leqslant Ct^{-n-1}\int_{B((y,t),t)}|u(z,\tau)|^{p/2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau,$$

其中 $B((y,t),t)$ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 中以 (y,t) 为心，t 为半径的球. 因此

$$\begin{aligned}|u(y,t)|^{p/2}&\leqslant Ct^{-n-1}\int_{B((y,t),t)}|u^+(z)|^{p/2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\\&\leqslant Ct^{-n}\int_{B(y,t)}|u^+(z)|^{p/2}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中 $B(y,t)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中以 y 为心，以 t 为半径的球.

注意到当 $|x-y|<t$ 时，$B(y,t)\subset B(x,2t)$，故

$$|u(y,t)|^{p/2}\leqslant Ct^{-n}\int_{B(x,2t)}|u^+(z)|^{p/2}\mathrm{d}z\leqslant CM(u^{+p/2})(x),$$

其中 M 表示 Hardy-Littlewood 极大函数. 于是

$$u^*(x)\leqslant C\{M(u^{+p/2})(x)\}^{2/p}.$$

从而

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}u^*(x)^p\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}\{M(u^{+p/2})(x)\}^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}u^+(x)^p\mathrm{d}x.$$

实际上，对任意 $a>0$，有

$$\|u_a^*\|_p\leqslant C_{p,a}\|u^+\|_p,$$

其中 $C_{p,a}$ 仅依赖于 p,a,n。为了说明这一点，只要在定理2.1的证明中，注意到 $B(y,t)\subset B(x,(1+a)t)$ 对 $|x-y|<at$ 成立，从而得到

$$u_a^*(x)\leqslant C_{p,a}\{M(u^{+p/2})(x)\}^{2/p}.$$

在第1章我们引入过调和函数面积积分 $S(u)(x)$（见§1.3的(3.9)式）。下面的定理说明，非切向极大函数 u^* 与面积积分 $S(u)$，在 L^p 模意义下是等价的。

定理2.2 设 u 在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 调和，则对 $0<p<\infty$，$u^*\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 的充分必要条件是 $S(u)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 且当 $t\to\infty$ 时，$u(x,t)\to 0$。进一步还有

$$\|u^*\|_p\sim\|S(u)\|_p.$$

为证明此定理，我们需要一些引理。

引理2.2 设 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中紧集，$\mathscr{R}=\bigcup\limits_{x\in E}\Gamma_a^h(x)$，则存在一区域族 $\{\mathscr{R}_\varepsilon\}$，$\varepsilon>0$，具有下列性质：

(i) $\overline{\mathscr{R}}_\varepsilon\subset\mathscr{R}$，$\mathscr{R}_{\varepsilon_1}\subset\mathscr{R}_{\varepsilon_2}$ 如果 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$；

(ii) $\mathscr{R}_\varepsilon\to\mathscr{R}$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时，即 $\mathscr{R}=\bigcup\limits_{\varepsilon>0}\mathscr{R}_\varepsilon$；

(iii) $\partial\mathscr{R}_\varepsilon=\mathscr{B}_\varepsilon=\mathscr{B}_\varepsilon^1\cup\mathscr{B}_\varepsilon^2$，其中 $\mathscr{B}_\varepsilon^2$ 是超平面 $t=h-\varepsilon$ 的一部分；

(iv) $\mathscr{B}_\varepsilon^1$ 是超曲面 $t=a^{-1}\delta_\varepsilon(x)$ 的一部分（见图2），其中

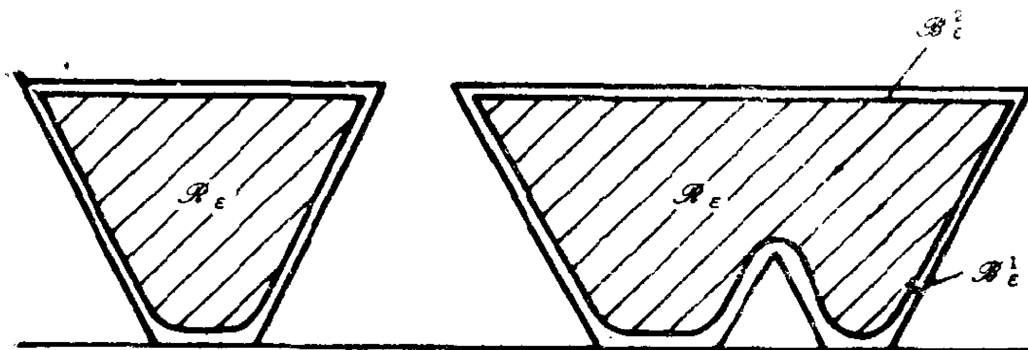


图 2

$\delta_\varepsilon \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，且

$$\left|\frac{\partial \delta_\varepsilon}{\partial x_j}\right| \leqslant 1, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 令 $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, E)$，因为 E 是紧集，所以对 $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ 有 $|\delta(x) - \delta(y)| \leqslant |x - y|$。取 $\varphi \in C^\infty$，$\varphi \geqslant 0$，具有紧支集且 $\int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(x) \mathrm{d}x = 1$。记 $\varphi_\eta(x) = \eta^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right)$，令

$$\tilde{\delta}_\eta(x) = \varphi_\eta * \delta(x).$$

显然，$\tilde{\delta}_\eta \in C^\infty$，当 $\eta \to 0$ 时 $\tilde{\delta}_\eta$ 一致收敛于 δ，且 $\left|\frac{\partial \tilde{\delta}_\eta}{\partial x_j}\right| \leqslant 1$。选择 η 与 η' 如下：

i) $\tilde{\delta}_\eta(x) + \eta' \geqslant \delta(x)$，这只需取 η 与 η' 充分小即可；

ii) 若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，则 $\tilde{\delta}_{\eta_1}(x) + \eta'_1 \geqslant \tilde{\delta}_{\eta_2}(x) + \eta'_2$；

iii) 当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\eta \to 0$ 且 $\eta' \to 0$。

现令 $\mathscr{R}_\varepsilon = \{(x, t) \in \boldsymbol{R}^{n+1}_+ : \delta_\varepsilon(x) < \alpha t,\ 0 < t < h - \varepsilon\}$，其中 $\delta_\varepsilon(x) = \tilde{\delta}_\eta(x) + \eta'$。显然，$\mathscr{R}_\varepsilon$ 满足引理的要求。证毕。

引理2.3 设 u 在 Γ^k_β 调和，$\beta > \alpha$，$k > h$。

(a) 若在 Γ^k_β 中 $|u| \leqslant 1$，则在 Γ^h_α 中 $t|\nabla u| \leqslant C$；

(b) 若 $\int_{\Gamma^k_\beta} |\nabla u|^2 t^{1-n} \mathrm{d}x \mathrm{d}t \leqslant 1$，则在 Γ^h_α 有 $t|\nabla u| \leqslant C$，其中 C 只依赖于 α, β, h, k 与维数 n。

证明 容易看出，存在 C_1，使得对任意 $(x, t) \in \Gamma^h_\alpha$，以 (x, t) 为中心，以 $r = C_1 t$ 为半径的球 $B \subset \Gamma^k_\beta$。

取 $\varphi \in C^\infty$，$\mathrm{supp}\varphi \subseteq \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| \leqslant 1\}$，$\varphi(x) = \varphi(|x|)$，且

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(x) \mathrm{d}x = 1.$$

对 $\boldsymbol{R}^n$ 的调和函数 $u(x)$，我们有平均值公式

$$u(x_0)=\int_{R^n}u(x_0-x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a u(x_0)=\int_{R^n}u(y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\varphi_r(x_0-y)\mathrm{d}y.$$

由 Schwarz 不等式，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a u(x_0)\leqslant A_a r^{-\frac{n}{2}-|a|}\left(\int_{B(x_0,r)}|u(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{1/2}.$$

回到 R^{n+1}_+，取 $a=1$ 便得

$$|\nabla u(x,t)|\leqslant Cr^{-1}\sup_{(y,t)\in B((x,t),C_1t)}|u(y,t)|\leqslant Cr^{-1}=Ct^{-1},$$

这就证明了(a)。

从 $|\nabla u|^2$ 的下调和性得

$$|\nabla u(x,t)|^2\leqslant C_2r^{-n-1}\int_{B((x,t),C_1t)}|\nabla u|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t',\quad r=C_1t,$$

注意到此时 $t-C_1t<t'<t+C_1t$，故存在 C_2 与 C_3 使得 $C_2t<t'<C_3t$，于是

$$t^2|\nabla u(x,t)|^2\leqslant C_4\int_{B((x,t),C_1t)}|\nabla u|^2t'^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t'$$

$$\leqslant C_4\int_{\Gamma_\beta^1}|\nabla u|^2t'^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t'\leqslant C_4,$$

(b)获证。引理2.3证毕。

定理 2.2 的证明 只需考虑 $p<2$ 的情形。我们先假设 u 是 $f\in L^2(R^n)$ 的 Poisson 积分。

必要性 由定理 2.1 及接着的说明，不妨假设 $u^*(x)=\sup_{|x-y|<\beta t}|u(y,t)|\in L^p(R^n)$，其中 $\beta>1$。我们要证明当 $t\to\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$ 且 $S(u)\in L^p(R^n)$。由§3.1中（1.4）的证明可得

$$|u(x,t)| \leqslant At^{-n/p},$$

故当$t \to \infty$时$u(x,t) \to 0$。

令

$$E=\{x \in \boldsymbol{R}^n: \ u^*(x) \leqslant a\}, \qquad B=E^c,$$

$$|B|=|\{x \in \boldsymbol{R}^n: \ u^*(x)>a\}|=\lambda_{u^*}(a).$$

我们将证明下述不等式

$$\lambda_{S(u)}(a) \leqslant C\left\{\lambda_{u^*}(a)+a^{-2}\int_0^a s\lambda_{u^*}(s)\mathrm{d}s\right\}. \tag{2.1}$$

由此我们有

$$\begin{aligned}
\|S(u)\|_p^p &= p\int_0^\infty a^{p-1}\lambda_{S(u)}(a)\mathrm{d}a \\
&\leqslant C\left\{p\int_0^\infty a^{p-1}\lambda_{u^*}(a)\mathrm{d}a\right. \\
&\quad \left.+p\int_0^\infty a^{p-3}\int_0^a s\lambda_{u^*}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}a\right\} \\
&\leqslant C\|u^*\|_p^p+Cp\int_0^\infty s\lambda_{u^*}(s)\int_s^\infty a^{p-3}\mathrm{d}a\mathrm{d}s \\
&\leqslant C_p\|u^*\|_p^p.
\end{aligned}$$

为证明（2.1），令$\mathscr{R}=\bigcup_{x \in E}\Gamma(x)$。由引理2.3的(a)知，当$(x,t) \in \mathscr{R}$时，$t|\nabla u(x,t)| \leqslant Ca$。另外

$$\begin{aligned}
\int_E [S(u)(x)]^2\mathrm{d}x &= \int_E\iint_{\Gamma(x)}|\nabla u(y,t)|^2 t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}}|\nabla u(x,t)|^2 t^{1-n}\chi(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中$\chi(x,y,t)$是集合$\{(x,y,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_+^{n+1}: |x-y|<t, x \in E\}$

的特征函数。注意到

$$\int_{R^n}\chi(x,y,t)\mathrm{d}x\leqslant Ct^n,$$

我们有

$$\int_E [S(u)(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant C\iint_{\mathscr{R}} t|\nabla u(y,t)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$=C\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\mathscr{R}_\varepsilon} t|\nabla u(y,t)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

用 Green 公式，注意到$\Delta|u|^2=2|\nabla u|^2$以及当 $t\to\infty$时 $u(x,t)\to 0$，便有

$$\int_E S(u)(x)^2\mathrm{d}x\leqslant C\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\mathscr{B}_\varepsilon} t\frac{\partial|u|^2}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-\int_{\mathscr{B}_\varepsilon}|u|^2\frac{\partial t}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\right\}$$

$$+C\lim_{h\to\infty}\int_{\mathscr{R}_\varepsilon\cap\{t=h\}}\left(t\frac{\partial|u|^2}{\partial n}-|u|^2\frac{\partial t}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

显然，$\left|t\dfrac{\partial|u|^2}{\partial n}\right|\leqslant 2t|u||\nabla u|$，$\left|\dfrac{\partial t}{\partial n}\right|\leqslant 1$。由 u 是 $f\in L^2$ 的 Poisson 积分，知 $u^*(x)\in L^2(R^n)$。并且还有

(i) $\sup\limits_{t>0}|u(x,t)|\in L^2(R^n)$;

(ii) $\sup\limits_{t>0}t|\nabla u(x,t)|\in L^2(R^n)$，这可以从引理2.3得到；

(iii) $\lim\limits_{t\to 0}t\nabla u(x,t)=0$，a.e. $x\in E$。这是因为对 $x_0\in E$，考虑 $u(y,t)-u(x_0,0)$，根据 Fatou 定理，$u(y,t)-u(x_0,0)$ 对几乎所有的 $x_0\in E$ 有非切向边值 0，从而只要 h 充分小，它在锥上的值很小。由引理2.3知 $t|\nabla u(x,t)|$ 在锥上的值也很小。

由 (i) 与 (ii) 及控制收敛定理，知

$$\lim_{h\to\infty}\int_{\mathscr{R}_\varepsilon\cap\{t=h\}}\left(t\frac{\partial|u|^2}{\partial n}-|u|^2\frac{\partial t}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$

现在将 $\mathscr{B}_\varepsilon$分解为两部分：$\mathscr{B}_\varepsilon=\mathscr{B}_\varepsilon^B\cup\mathscr{B}_\varepsilon^E$，其中 $\mathscr{B}_\varepsilon^E$是 $\partial\mathscr{R}_\varepsilon$

在集合 E 上的部分，$\mathscr{B}_\varepsilon^B$是 $\partial\mathscr{R}_\varepsilon$在集合 B 上的部分。由(iii) 与控制收敛定理，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^E} t\frac{\partial|u|^2}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=0.$$

已知，当 $(x,t)\in\mathscr{R}$时，$|u(x,t)|\leqslant a$，$t|\nabla u(x,t)|\leqslant Ca$. 因此

$$\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^B} t\frac{\partial|u|^2}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\leqslant\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^B}2t|\nabla u|u\mathrm{d}\sigma$$

$$\leqslant Ca^2\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^B}\mathrm{d}\sigma\leqslant Ca^2|B|$$

$$=Ca^2\lambda_{u^*}(a).$$

另外

$$\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^E}|u|^2\frac{\partial t}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\leqslant\int_E u^{*2}\mathrm{d}\sigma\leqslant C\int_E u^{*2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_0^a s\lambda_{u^*}(s)\mathrm{d}s.$$

$$\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^B}|u|^2\frac{\partial t}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\leqslant Ca^2\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^B}\mathrm{d}\sigma\leqslant Ca^2|B|$$

$$=Ca^2\lambda_{u^*}(a).$$

这样便证明了

$$\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant C\left\{a^2\lambda_{u^*}(a)+\int_0^a s\lambda_{u^*}(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

由此立即得到 (2.1)。

充分性　设 $S(u)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，当 $t\to\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$。要证 $\|u^*\|_p\leqslant C\|S(u)\|_p$。不妨设定义 $S(u)$ 的角锥为 $\Gamma_\beta(x)$，$\beta>1$，而定义 u^*的角锥为 $\Gamma(x)=\Gamma_1(x)$。令 $E=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ S(u)(x)\leqslant a\}$，$B=E^c$，$|B|=\lambda_{S(u)}(a)$。我们只需证明类似于 (2.1)的不等式，

只不过交换 u^* 与 $S(u)$ 的地位：

$$\lambda_{u^*}(\alpha)\leqslant C\left\{\lambda_{S(u)}(\alpha)+\alpha^{-2}\int_0^\alpha s\lambda_{S(u)}(s)\mathrm{d}s.\right. \qquad (2.2)$$

证明的线索也类似于（2.1)的证明，只是按反方向进行而稍为复杂一些而已。

令 $E_0=\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ \forall\, Q=B(x,r),r\text{ 充分小有 }|E\cap Q|\geqslant\frac{1}{2}|Q|\right\}$，

换言之，E_0是 E 中相对密度至少为1/2的点的集合。由于 E 是闭集，E_0显然也是闭集，$E_0\subset E$。容易验证

$$E_0^c\subset B^*=\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(\chi_B)(x)>\frac{1}{2}\right\},$$

其中 M 是 Hardy–Littlewood 极大函数，χ_B是集合 B 的特征函数。由极大函数的弱（1,1)型知，

$$|B^*|\leqslant C|B|=C\lambda_{S(u)}(\alpha).$$

记 $\mathscr{R}=\bigcup_{x\in E_0}\Gamma(x)$，$\mathscr{R}_\varepsilon$是$\mathscr{R}$的逼近区域族。我们有

$$\begin{aligned}&\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\int_{\bigcup_{x\in E}\Gamma_\beta(x)}|\nabla u(y,t)|^2|\{x\in E:\ (y,t)\in\Gamma_\beta(x)\}|t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_{\mathscr{R}}|\nabla u(y,t)|^2|\{x\in E:\ (y,t)\in\Gamma_\beta(x)\}|t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 $(y,t)\in\mathscr{R}$ 时，存在 $\bar{x}\in E_0$，使得 $|y-\bar{x}|<t$。只要 $|x-\bar{x}|<(\beta-1)t$，就有$|y-x|\leqslant|y-\bar{x}|+|\bar{x}-x|<\beta t$，即$(y,t)\in\Gamma_\beta(x)$。这就是说，当 $(y,t)\in\mathscr{R}$时，存在 $\bar{x}\in E_0$，使得

$$\{x\in E:\ |x-\bar{x}|<(\beta-1)t\}\subset\{x\in E:\ |x-y|<\beta t\},$$

故

$$|\{x\in E: (y,t)\in\Gamma_\beta(x)\}|\geqslant|E\cap K|,$$

其中K是以$\bar{x}\in E_0$为中心，以$(\beta-1)t$为半径的球。按E_0定义，

$$|E\cap K|\geqslant\frac{1}{2}|K|\geqslant Ct^n.$$

因此

$$\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant C\int_{\mathscr{R}}|\nabla u(y,t)|^2t\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\geqslant C\int_{\mathscr{R}_\varepsilon}|\nabla u(y,t)|^2t\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

用 Green 公式，类似于前面的推理，有

$$\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant C_1\int_{\mathscr{B}_\varepsilon}|u(y,t)|^2\mathrm{d}\sigma$$

$$-C_2\int_{\mathscr{B}_\varepsilon}|u(y,t)|t|\nabla u(y,t)|\mathrm{d}\sigma.$$

令 $J_\varepsilon=\left(\int_{\mathscr{B}_\varepsilon}|u(y,t)|^2\mathrm{d}\sigma\right)^{1/2}$. 对任意 $\varepsilon>0, J_\varepsilon<\infty$，这是因为

$$\int_{\mathscr{B}_\varepsilon}|u(y,t)|^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\int_{\mathscr{B}_\varepsilon}u^{*2}(y)\mathrm{d}\sigma\leqslant C\int_{R^n}u^{*2}(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

考虑另一项

$$\int_{\mathscr{B}_\varepsilon}|u(y,t)|t|\nabla u(y,t)\mathrm{d}\sigma\leqslant\int_{\mathscr{B}^{B^*}_\varepsilon}+\int_{\mathscr{B}^{E_0}_\varepsilon}.$$

由引理2.3(b)知，$t|\nabla u(y,t)|\leqslant C\alpha$对$(y,t)\in\mathscr{R}$成立。用Schwarz不等式

$$\int_{\mathscr{B}^{B^*}_\varepsilon}|u(y,t)|t|\nabla u(y,t)|\mathrm{d}\sigma\leqslant CJ_\varepsilon\alpha|B^*|^{1/2}$$

$$\leqslant CJ_\varepsilon(\alpha^2\lambda_{S(u)}(\alpha))^{1/2}.$$

类似于前面的证明可知，当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$I_\varepsilon=\int_{\mathscr{B}_\varepsilon^{E_0}} t|\nabla u(y,t)||u(y,t)|\mathrm{d}\sigma\to 0.$$

这样，我们便得到

$$J_\varepsilon^2\leqslant C\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x+CJ_\varepsilon(a^2\lambda_{S(u)}(a))^{1/2}+CI_\varepsilon.$$

只要 ε 充分小，

$$J_\varepsilon^2\leqslant C\left\{\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x+a^2\lambda_{S(u)}(a)\right\}.$$

下面我们将证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时 J_ε 的极限是一 L^2 函数的积分。然后通过这个积分得到(2.2)。

令 $f^\varepsilon(x)=C|u(x,\delta_\varepsilon(x))|+Ca\chi_{B^*}(x)$，其中 $t=\delta_\varepsilon(x)$是超曲面$\mathscr{B}_\varepsilon=\partial\mathscr{R}_\varepsilon$ 的方程，χ_{B^*}是 B^* 的特征函数。记$U_\varepsilon(x,t)=P_t(f^\varepsilon)(x)$。我们断言

$$|u(x,t)|\leqslant U_\varepsilon(x,t),\quad (x,t)\in\mathscr{B}_\varepsilon. \tag{2.3}$$

事实上，选取 $1<\beta^*<\beta$。这时，存在$C>0$，使得只要$(y,t)\in\mathscr{B}_\varepsilon$，以$(y,t)$为中心，$Ct$ 为半径的球B'便落在 $\bigcup\limits_{x_0\in E_0}\Gamma_{\beta^*}(x_0)$。由引理2.3(b)，知 $t|\nabla u(y,t)|\leqslant Ca$ 对$(y,t)\in B'$ 成立。设 $P_1=(y,t)\in B'$，P_2 是B' 中另外一点，则$|P_1-P_2|<Ct$，从而

$$\begin{aligned}|u(P_1)-u(P_2)|&\leqslant Ct\sup_{B'}|\nabla u(x',t')|\\&\leqslant C_1t'\sup_{B'}|\nabla u(x',t')|\leqslant Ca\chi_{B^*}(y).\end{aligned}$$

令 $S_\varepsilon=\mathscr{B}_\varepsilon\cap B'$。则

$$\begin{aligned}|u(y,t)|=|u(P_1)|&\leqslant\frac{1}{|S_\varepsilon|}\int_{S_\varepsilon}|u(P_2)|\mathrm{d}\sigma+Ca\chi_{B^*}(y)\\&\leqslant\frac{C'}{Ct^n}\int_{|z-y|<Ct}|f^\varepsilon(z)|\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\leqslant C'\int_{|z-y|<Ct}\frac{t}{(t^2+|z-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}|f^{\varepsilon}(z)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant P_t(f^{\varepsilon})(y)=U_{\varepsilon}(y,t).$$

由调和函数的极值原理知(2.3)对$(x,t)\in\mathscr{R}_{\varepsilon}$成立。

注意f^{ε}在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中有界，故存在序列$\varepsilon_k\to 0$，使得f^{ε_k}在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中弱收敛到$f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，从而$U_{\varepsilon_k}(x,t)\to U(x,t)=P_t(f)(x)$。在(2.3)中令$\varepsilon_k\to 0$，便有

$$|u(x,t)|\leqslant U(x,t),\quad (x,t)\in\mathscr{R}.$$

再由

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|f^{\varepsilon}(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathscr{B}_{\varepsilon}}|u(y,t)|^2\mathrm{d}\sigma+C\alpha^2|B^*|\cdot$$

$$\leqslant C\int_{\mathscr{B}_{\varepsilon}}|u(y,t)|^2\mathrm{d}\sigma+C\alpha^2\lambda_{S(u)}(\alpha)$$

$$\leqslant C\left\{\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x+\alpha^2\lambda_{S(u)}(\alpha)\right\},$$

知

$$\int_{R^n}|f|^2\mathrm{d}x\leqslant C\left\{\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x+\alpha^2\lambda_{S(u)}(\alpha)\right\}.$$

于是

$$\lambda_{u^*}(\alpha)=|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ u^*(x)>\alpha\}|\leqslant|E_0^c|+|\{x\in E_0:\ u^*(x)>\alpha\}|$$

$$\leqslant C\lambda_{S(u)}(\alpha)+\alpha^{-2}\int_{E_0}u^{*2}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\lambda_{S(u)}(\alpha)+\alpha^{-2}\int_{E_0}U^{*2}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\lambda_{S(u)}(\alpha)+\alpha^{-2}\int_{R^n}|f|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\left\{\lambda_{S(u)}(\alpha)+\alpha^{-2}\int_E[S(u)(x)]^2\mathrm{d}x\right\}$$

$$\leqslant C\left\{\lambda_{S(u)}(\alpha)+\alpha^{-2}\int_0^\alpha s\lambda_{S(u)}(s)\mathrm{d}s\right\},$$

(2.2)获证。

最后，我们去掉关于$u(y,t)$是L^2函数的Poisson积分的限制。同样，我们只需考虑$0<p<2$。

令$u_\varepsilon(x,t)=u(x,t+\varepsilon)$。若$u^*\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，则$|u_\varepsilon(x,t)|\leqslant A\varepsilon^{-n/p}$，故

$$\sup_{t>0}\int_{R^n}|u_\varepsilon(x,t)|^2\mathrm{d}x<\infty,$$

即u_ε是L^2函数的Poisson积分。于是

$$\|S(u_\varepsilon)\|_p\leqslant C\|u_\varepsilon^*\|_p\leqslant C\|u^*\|_p.$$

令$\varepsilon\to 0$便得$\|S(u)\|_p\leqslant C\|u^*\|_p$。

反过来，若当$\varepsilon\to 0$时$u(x,t)\to 0$且$\|S(u)\|_p<\infty$。令$u_{\varepsilon N}(x,t)=u(x,t+\varepsilon)-u(x,t+N)$。则

$$|u_{\varepsilon,N}(x,t)|\leqslant\int_{t+\varepsilon'}^{t+N}\left|\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\right|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\left(\int_0^\infty s\left|\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\right|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_{t+\varepsilon'}^{t+N}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\log\frac{N}{\varepsilon'}\right)^{1/2}g(u)(x)\leqslant C_{\varepsilon N}S(u)(x).$$

取$\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2}$，便可证明

$$|u_{\varepsilon N}(x,t)|^{2-p}\leqslant C_{\varepsilon N}\varepsilon^{-(2-p)/p}=C_{\varepsilon N},$$

从而

$$\sup_{t>0}\int_{R^n}|u_{\varepsilon N}(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant C_{\varepsilon N}\sup_{t>0}\int_{R^n}[S(u)(x)]^p|u_{\varepsilon N}(x,t)|^{2-p}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_{\varepsilon N}\int_{R^n}[S(u)(x)]^p\mathrm{d}x<\infty.$$

这说明，$u_{\varepsilon N}$ 是 L^2 函数的 Poisson 积分．故

$$\|u_{\varepsilon N}^*\|_p \leqslant C\|S(u_{\varepsilon N})\|_p \leqslant 2C\|S(u)\|_p.$$

令 $\varepsilon\to 0, N\to\infty$，由 Fatou 引理得

$$\|u^*\|_p \leqslant C\|S(u)\|_p.$$

至此，定理 2.2 证完．

下面的定理给出了 $H^p(R_+^{n+1})$的极大函数刻画．

定理2.3　设 $u(x,t)$ 在 R_+^{n+1} 调和。则 $u\in \mathrm{Re}H^p(R_+^{n+1})$的充分必要条件是 $u^*\in L^p(R^n)$．

定理中的必要性部分，就是已证明了的定理 1.1．为证充分性，需要以下的引理：

引理2.4　若 u 在 R_+^{n+1} 调和，$\|u(\cdot,t)\|_\infty\leqslant Ct^{-\delta}$，其中 $\delta>0$，则

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,t)\right\|_\infty \leqslant Ct^{-\delta-1}.$$

引理2.5　设 $\alpha<\beta, u(x,t)$在 R_+^{n+1} 调和，$\|u(\cdot,t)\|_\infty\leqslant Ct^{-\delta}$，$\delta>0$，且

$$\int_{\Gamma_\beta}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant 1,$$

则

$$\int_{\Gamma_\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant C,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

其中 C 只依赖于 α,β 与 n．

引理的证明移至后面，先用它们来证明定理 2.3 的充分性．

定理 2.3 的充分性证明　设 $u^*\in L^p(R^n)$，这时$\|u(\cdot,t)\|_\infty\leqslant Ct^{-n/p}$．由引理 2.4 知

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(\cdot,t)\right\|_\infty\leqslant Ct^{-(n/p)-|\alpha|}.$$

引入 u 的“k 阶共轭调和函数”如下：

$$u_{(j)}(x,t)=\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_t^\infty (s-t)^k\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{j_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1}\cdots$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}u(x,s)\mathrm{d}s,$$

其中$(j)=(j_0,j_1,\cdots,j_n)$，$j_0+j_1+\cdots+j_n=k+1$。显然，当$j_0=k+1,j_1=\cdots=j_n=0$时，$u_{(j)}=u$。容易验证，$(u_{(j)})$是k阶共轭调和函数系。由$u^*\in L^p$知$S(u)\in L^p$。再由引理2.5，有

$$S(u_{(j)})(x)\leqslant CS(u)(x),$$

这里只要求左边面积积分中的角锥宽度较右边的小些。故由$u_{(j)}\to 0$（当$t\to\infty$），得到

$$\|u^*_{(j)}\|_p\leqslant C\|S(u_{(j)})\|_p\leqslant C\|S(u)\|_p\leqslant C\|u^*\|_p,$$

于是

$$\sup_{t>0}\int_{R^n}\left(\sum_j|u_{(j)}(x,t)|^2\right)^{p/2}\mathrm{d}x\leqslant C\sum_j\|u^*_{(j)}\|_p^p<\infty,$$

即$u\in \mathrm{Re}H^p(R^{n+1}_+)$。证毕。

引理2.4的证明 由 Poisson 核的估计

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}P_t\right|\leqslant C|x|^{-n-1},\quad \left|\frac{\partial}{\partial t}P_t\right|\leqslant Ct^{-n-1},$$

有

$$\int_{R^n}\left|\frac{\partial P_t}{\partial t}\right|\mathrm{d}x\leqslant C\int_{|x|\leqslant t}t^{-n-1}\mathrm{d}t+C\int_{|x|>t}|x|^{-n-1}\mathrm{d}x\leqslant Ct^{-1}.$$

同理可证

$$\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}P_t\right|\mathrm{d}x\leqslant Ct^{-1},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

根据$u(x,t)=P_{t/2}(u(\circ,t/2))(x)$，便得

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,t)\right|\leqslant\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}P\left(x-z,\frac{t}{2}\right)\right|\left|u\left(z,\frac{t}{2}\right)\right|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant Ct^{-\delta}\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}P_{t/2}\right|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant Ct^{-\delta-1},\quad j=1,\cdots,n.$$

引理2.5的证明 不妨设 Γ_α 与 Γ_β 的顶点都是原点。取常数 $C>0$，使得对任意 $(x,t)\in\Gamma_\alpha$，有 $B((x,t),Ct)\subset\Gamma_\beta$。记 ρ 是 Γ_α 内任意单位向量，$u_\rho(s)=u(s\rho)$。我们只要证明

$$\int_0^\infty s\left|\frac{\partial u_\rho(s)}{\partial x_j}\right|^2\mathrm{d}s\leqslant A<\infty,$$

因为上述不等式对 ρ 取积分，便得引理所要求的结果。由

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=-\int_t^\infty\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial\tau}(x,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

利用引理 2.3 的证明知

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\tau}u(x,\tau)\right|$$

$$\leqslant C\tau^{-\frac{n+3}{2}}\left(\int_{B((x,\tau),C\tau)}\left|\frac{\partial u}{\partial t'}(x',t')\right|^2\mathrm{d}x'\mathrm{d}t'\right)^{1/2},$$

$$\leqslant C\tau^{-\frac{n+3}{2}}(J_\tau)^{1/2},$$

其中

$$J_\tau=\iint_{S_\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial t'}\right|^2\mathrm{d}x'\mathrm{d}t',$$

$S_\tau=\{(x,t)\in R_+^{n+1}:\ |x|<\beta t,\tau-C_1\tau<t<\tau+C_1\tau\}$（见图3）。注意到 $t=s\cos\theta\geqslant sa_0$，其中 $a_0=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$，便有

$$\left|\frac{\partial u_\rho(s)}{\partial x_j}\right|=\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right|\leqslant C\int_{sa_0}^\infty\tau^{-\frac{n+3}{2}}J_\tau^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau,$$

从而

$$\int_0^\infty s\left|\frac{\partial u_\rho(s)}{\partial x_j}\right|^2\mathrm{d}s\leqslant C\int_0^\infty s\left(\int_{sa_0}^\infty\tau^{-\frac{n+3}{2}}J_\tau^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}s.$$

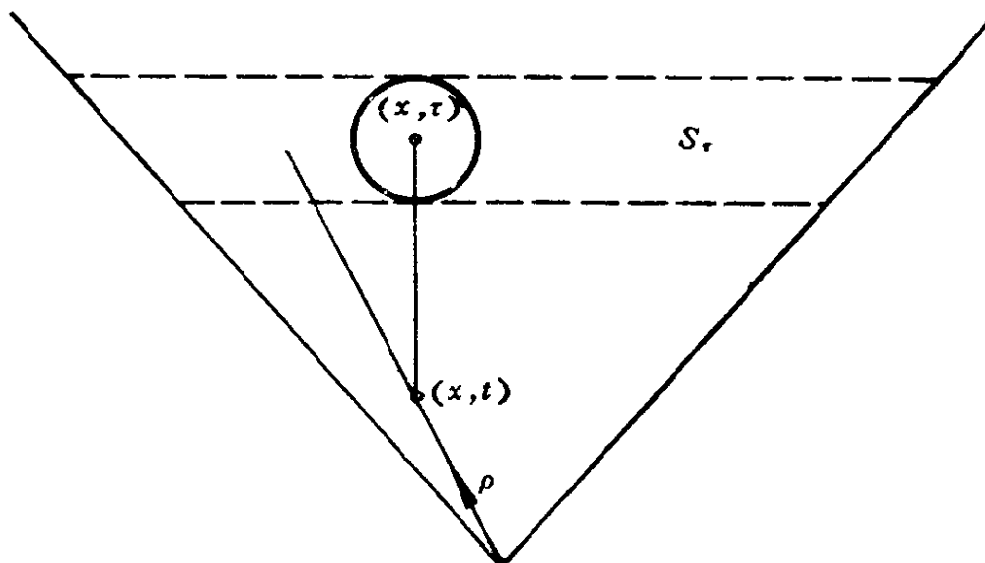


图 3

应用 Hardy 不等式：对 $f\geqslant 0, p\geqslant 1, r>0$，

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_x^\infty f(y)\mathrm{d}y\right)^p x^{r-1}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\frac{p}{r}\left(\int_0^\infty (yf(y))^p y^{r-1}\mathrm{d}y\right)^{1/p},$$

我们得到

$$\int_0^\infty s\left|\frac{\partial u_\rho(s)}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}s\leqslant C\int_0^\infty J_\tau \tau^{-n}\mathrm{d}\tau$$

$$= C\int_0^\infty \tau^{-n}\iint_{S_\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial t'}\right|^2 \mathrm{d}x'\mathrm{d}t'\mathrm{d}\tau$$

$$= C\iint_{\Gamma_\beta}\left|\frac{\partial u}{\partial t'}\right|^2\left(\int \tau^{-n}\chi(\tau,x',t')\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t',$$

其中 $\chi(\tau,x',t')$ 是 S_τ 的特征函数．显然

$$\int \tau^{-n}\chi(\tau,x',t')\mathrm{d}\tau\leqslant\int_{\tau-C_1\tau\leqslant t\leqslant\tau+C_1\tau}\tau^{-n}\mathrm{d}\tau=C't^{-n+1},$$

引理 2.5 获证．

§ 4.3 H^p 空间的实变刻画

用共轭调和函数系定义的 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，其元素均有边值，其边值组成的空间与 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$同构. 但它涉及共轭调和函数，构造仍然十分复杂. 本章引入的 $\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，即 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$的"实部"组成的空间，它实质上等同于 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$本身，因为每个满足 H^p 条件的共轭调和函数系，由它的"实部"唯一决定. 自然，我们也希望用"实部"的边值组成的空间来代替 $\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$. 但这边值采用什么意义呢？用几乎处处意义的边值，其边值并不唯一决定 $\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$的调和函数. 典型的例子是下面的例 1.

例 1 设 $F(z)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)$,它在 $\boldsymbol{R}_+^2$ 解析，满足估计

$$
|F(z)|\leqslant\frac{1}{\pi|z||z-1|}
$$

$$
\leqslant\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{|x|}, & \text{当}|x|<\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{|x-1|}, & \text{当}|x-1|<\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{|x(x-1)|}, & \text{当}x<-\dfrac{1}{2}\text{或}x>\dfrac{3}{2},\end{cases}
$$

因此，当$\frac{1}{2}<p<1$时，

$$
\sup_{t>0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+\mathrm{i}t)|^p\mathrm{d}x<\infty,
$$

故 $F\in H^p(\boldsymbol{R}_+^2)$. 而

$$
\mathrm{Re}F(x+\mathrm{i}t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{x^2+t^2}-\frac{t}{(x-1)^2+t^2}\right)
$$

却有几乎处处为 0 的边值：

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{Re}F(x+it)=0 \quad (x\neq 0,1)。$$

显然，$F\not\equiv 0$。

在广义函数意义下，

$$\mathrm{Re}F(x+it)\xrightarrow{\mathscr{S}'}\delta_0-\delta_1 \quad (t\to 0),$$

其中 δ_{x_0} 是 x_0 上的 Dirac 测度。

§3.1中的定理 1.6 告诉我们，$\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$的元素存在唯一的广义函数边值．而且反过来，其边值唯一决定 $\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$的元素．一个自然的问题是，如何刻画 $\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$的广义函数边值？本节的内容就是回答这个问题．其结果完全与调和函数无关，这是有点出人意料之外的。

我们引入几种极大函数，其中很关键的是“大极大函数”(grand maximal function)。

定义3.1 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$。定义

f 的垂直极大函数：

$$\varphi^+(f)(x)=\sup_{t>0}|\varphi_t * f(x)|;$$

f 的非切向极大函数：

$$\varphi_a^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<at}|\varphi_t * f(y)|, \quad a>0,$$

$a=1$ 时，简记为 $\varphi^*(f)$；

f 的切向极大函数：

$$\varphi_\lambda^{**}(f)(x)=\sup_{(y,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}}\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^\lambda|\varphi_t * f(y)|, \quad \lambda>0;$$

f 的大极大函数：

$$G^*(f)(x)=\sup_{\varphi\in\mathscr{A}}\sup_{|y-x|<t}|\varphi_t * f(y)|,$$

其中

$$\mathscr{A}=\left\{\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n):\ \int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\neq 0,\right.$$

$$\left.\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|x|)^{N_0}\sum_{|\alpha|\leqslant N_0}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\varphi\right|\mathrm{d}x\leqslant 1\right\},$$

N_0是仅依赖于p与维数n的整数。

本节的主要结果是

定理3.1 (C.Fefferman-Stein) 对$0<p<\infty, f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，下列命题等价：

(1) $\varphi^+(f)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 对某个$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$；

(2) $\varphi_a^*(f)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 对某个$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$；

(3) $G^*(f)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$；

(4) 存在$u\in\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，使得$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}u(x,t)$在广义函数$\mathscr{S}'$意义下成立。

实际上，我们证明的是，若$u\in\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，且$f$是$u$在广义函数意义下的边值，则对任意的$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\neq 0$，有$\varphi^+(f),\varphi_a^*(f)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$。显然，如果想进一步得到范数的等价性，则必须对$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$加以限制。其最一般的限制性条件便是"大极大函数"定义中的条件。因此，在H^p空间的实变刻画中，"大极大函数"是个关键。

我们先比较$\varphi_a^*(f)$和$\varphi_\lambda^{**}(f)$。

引理3.1 若$\lambda p>n, \varphi^*(f)\in L^p, 0<p<\infty$，则$\varphi_\lambda^{**}(f)\in L^p$，且

$$\|\varphi_\lambda^{**}(f)\|_p\leqslant C_p\|\varphi^*(f)\|_p.$$

证明 先比较$\varphi_a^*(f)$与$\varphi^*(f)$。令

$$E_s=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ \varphi^*(f)(x)>s\},$$

$$E_s^* = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n: \ M(\chi_{E_s})(x) > \frac{C}{a^n} \right\}.$$

由极大函数M的弱(1,1)型， 知$|E_s^*| \leqslant \frac{A}{C} a^n |E_s|$.

对任意 $x \in E_s^*$， 任取$(y,t) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$: $|y-x| < at$， 则以 y 为中心， t 为半径的球 $B(y,t)$、不能包含在 E_s 内，因为否则

$$M(\chi_{E_s})(x) \geqslant \frac{B(y,t)}{B(x,at)} \geqslant \frac{C}{a^n},$$

与 $x \notin E_s$ 矛盾。故存在 $z \in B(y,t)$ 使得 $\varphi^*(f)(z) \leqslant s$， 从而 $|\varphi_t * f(y)| \leqslant \varphi^*(f)(z) \leqslant s$. 这说明，对任意 $x \notin E_s^*$, $|y-x| < at$, 则 $|\varphi_t * f(y)| \leqslant s$, 即 $\varphi_a^*(f) \leqslant s$. 故 $E_s^* \supset \{x \in R^n: \ \varphi_a^*(f) > s\}$. 于是

$$\lambda_{\varphi_a^*(f)}(s) = |\{x \in \boldsymbol{R}^n: \ \varphi_a^*(f) > s\}|$$
$$\leqslant |E_s^*| \leqslant C a^n |E_s| = C a^n \lambda_{\varphi^*(f)}(s).$$

经简单计算便有

$$\|\varphi_a^*(f)\|_p \leqslant C a^{n/p} \|\varphi^*(f)\|.$$

现在比较 $\varphi^*(f)$ 与 $\varphi_\lambda^{**}(f)$:

$$\varphi_\lambda^{**}(f)(x) \leqslant \sup_{|y-x|<t} \left(\frac{t}{|x-y|+t} \right)^\lambda |\varphi_t * f(y)|$$

$$+ \sup_{m \geqslant 0} \sup_{2^m t \leqslant |x-y| < 2^{m+1} t} \left(\frac{t}{|x-y|+t} \right)^\lambda |\varphi_t * f(y)|$$

$$\leqslant \varphi^*(f)(x) + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m\lambda} \varphi_{2^{m+1}}^*(f)(x).$$

故当 $0 < p < 1$ 时，

$$\int_{R^n} \varphi_\lambda^{**}(f)(x)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{R^n} \varphi^*(f)(x)^p \mathrm{d}x + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{R^n} 2^{-m\lambda p} \varphi_{2^{m+1}}^*(f)(x)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\left\{1+\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m\lambda p} 2^{(m+1)n}\right\}\|\varphi^*(f)\|_p^p$$

$$\leqslant C\|\varphi^*(f)\|_p^p, \text{ 只要 } \lambda p>n。$$

当 $1\leqslant p<\infty$ 时，

$$\|\varphi_\lambda^{**}(f)\|_p \leqslant \|\varphi^*(f)\|_p+\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m\lambda}\|\varphi_{2^{m+1}}^*(f)\|_p$$

$$\leqslant \|\varphi^*(f)\|_p+\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m\lambda} 2^{(m+1)n/p}\|\varphi^*(f)\|_p$$

$$\leqslant C\|\varphi^*(f)\|_p, \text{ 只要 } \lambda p>n。$$

引理3.2 存在$[1,\infty)$上无穷次可微函数ψ，满足

(i) $\psi(x)=o(x^{-N})$，对任意 $N\in \boldsymbol{Z}^+$；

(ii) $\int_1^{\infty}\psi(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_1^{\infty}x^k\psi(x)\mathrm{d}x=0$，$k=1,2,\cdots$。

证明 令 $\psi(z)=\frac{\mathrm{e}}{\pi z}\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{-\omega(z-1)^{1/4}})$，其中 $\omega=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$。对 $\mathrm{e}^{-\omega(z-1)^{1/4}}$，从 1 至$\infty$取单值分支(见图 4)，应用 Cauchy 定理，计算轨道积分

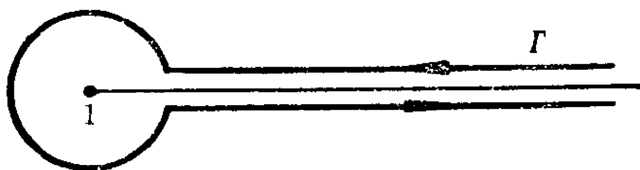


图 4

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\omega(z-1)^{1/4}}\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-\omega(z-1)^{1/4}}\Big|_{z=0}=\mathrm{e}^{-1},$$

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{z^k}{z}\mathrm{e}^{-\omega(z-1)^{1/4}}\mathrm{d}z=0, \quad \text{当 } k=1,2,\cdots。$$

定理3.1的证明 证明次序为(4)$\Longrightarrow$(1),(2)$\Longrightarrow$(3),(1)$\Longrightarrow$(2),(3)$\Longrightarrow$(4)。

(4)$\Longrightarrow$(1)．设$f(x)$是$u(x,t)\in \mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$在广义函数意义下的边值．我们要从 Poisson 核出发作一个速降恒等逼近．令

$$\sigma_t(x)=\int_1^\infty \psi(s)P_{st}(x)\mathrm{d}s,$$

其中ψ来自引理 3.2，P_t是 Poisson 核．易见，

$$\hat{\sigma}_1(\xi)=\int_1^\infty \psi(s)\mathrm{e}^{-s|\xi|}\mathrm{d}s$$

在无穷远处速降，且在原点之外光滑．在原点附近展开$\mathrm{e}^{-s|\xi|}$，得

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1(\xi)&=\int_1^\infty \psi(s)\left\{\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{s^k|\xi|^k}{k!}+\frac{s^N|\xi|^N}{N!}\mathrm{e}^{-\theta s|\xi|}\right\}\mathrm{d}s\\&=1+o(|\xi|^{-N}),\quad 当\xi\to 0,\end{aligned}$$

这说明$\hat{\sigma}_1(\xi)$在$\xi=0$处无穷次可微．因此$\sigma_1\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$．我们将证明$\sigma_1$满足(1)．首先

$$\int_{R^n}\sigma_1(x)\mathrm{d}x=\hat{\sigma}_1(0)=\int_1^\infty\psi(s)\mathrm{d}s=1.$$

其次，令$f_\varepsilon(x)=u(x,\varepsilon),\varepsilon>0$,则

$$\begin{aligned}|\sigma_t*f_\varepsilon(x)|&\leqslant\int_1^\infty|\psi(s)||P_{st}*f_\varepsilon(x)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\sup_{t>0}|P_t*f_\varepsilon(x)|\int_1^\infty|\psi(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant Cu_\varepsilon^*(x),\end{aligned}$$

其中$u_\varepsilon=P_t*f$．显然$u_\varepsilon^*(x)\leqslant u^*(x)$．因此

$$|\sigma_t*f_\varepsilon(x)|\leqslant Cu^*(x).$$

令 $\varepsilon\to 0$ 在广义函数意义下取极限，得

$$|\sigma_t * f(x)|\leqslant Cu^*(x),$$

从而

$$\sigma^+(f)(x)\leqslant Cu^*(x).$$

由 $u\in \mathrm{Re}\, H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ 可知 $u^*\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$。这就证明了 $\sigma^+(f)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$。实际上我们证得了 $\sigma^*(f)\in L^p$。

下面证明(2)$\Longrightarrow$(3)。即要从某一个 φ 的极大函数估计推出 $\mathscr{A}$ 中一般的 φ 的极大函数估计。从上面(4)$\Longrightarrow$(1)的证明过程中可以看出，如果用某个固定的 φ 代替 Poisson 核 P，则同样可由 $\varphi^*(f)\in L^p$ 推出相应的 $\sigma^*(f)\in L^p$，且$\|\sigma^*(f)\|_p\leqslant C\|\varphi^*(f)\|_p$。下面要从 σ 过渡到 $\mathscr{A}$ 中一般的 φ。

引理3.3 设$\Phi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\Phi=\psi*\varphi_s$，$0<s\leqslant 1$，则

$$|\Phi^*(f)(x)|\leqslant C\,s^{-N}\left(\int_{R^n}(1+|x|)^N|\psi(x)|\,\mathrm{d}x\right)\varphi_N^{**}(f)(x).$$

证明 对任意满足$|y-x|<t$ 的(y,t)，

$$
\begin{aligned}
|\Phi_t * f(y)| &\leqslant |\psi_t*(\varphi_{st}*f)(y)|\\
&\leqslant\int_{R^n}|\psi_t(y-z)|\,|\varphi_{st}*f(z)|\,\mathrm{d}z\\
&\leqslant\int_{R^n}|\psi_t(y-z)|\left(\frac{st}{|x-z|+st}\right)^{-N}\\
&\quad\times\left(\frac{st}{|x-z|+st}\right)^{N}|\varphi_{st}*f(z)|\,\mathrm{d}z\\
&\leqslant\varphi_N^{**}(f)(x)\int_{R^n}|\psi_t(y-z)|\left(1+\frac{|x-y|}{st}+\frac{|y-z|}{st}\right)^N\mathrm{d}z\\
&\leqslant\varphi_N^{**}(f)(x)\int_{R^n}|\psi_t(y-z)|\left(1+s^{-1}+\frac{|y-z|}{st}\right)^N\mathrm{d}z\\
&\leqslant 2^N s^{-N}\varphi_N^{**}(f)(x)\int_{R^n}(1+|x|)^N|\psi(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

引理3.4 σ 如同在证定理3.1(4)⟹(1)时引入的函数，$\theta\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$\operatorname{supp}\theta\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n;|x|\leqslant1\}$，则

$$\theta^*(f)(x)\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}\left(|\theta(x)|+\sum_{|\alpha|=N+1}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\theta(x)\right|\right)dx\cdot\sigma_N^{**}(f)(x).$$

证明 我们有

$$\theta=\theta*\sigma*\sigma+\sum_{k=0}^{\infty}(\theta*\sigma_{2^{-k-1}}*\sigma_{2^{-k-1}}-\theta*\sigma_{2^{-k}}*\sigma_{2^{-k}}),$$

这是因为右边级数的部分和

$$\theta*\sigma_{2^{-k-1}}*\sigma_{2^{-k-1}}=\theta*(\sigma*\sigma)_{2^{-k-1}}\to\theta,\quad 当k\to\infty,$$

且收敛是一致的。因此

$$\theta=\theta*\sigma*\sigma+\sum_{k=0}^{\infty}\theta*(\sigma_{2^{-k-1}}-\sigma_{2^{-k}})*(\sigma_{2^{-k-1}}+\sigma_{2^{-k}})$$

$$=\theta*\sigma*\sigma+\sum_{k=0}^{\infty}\theta*(\sigma_-)_{2^{-k}}*(\sigma_+)_{2^{-k}},$$

其中 $\sigma_-=\sigma_{2^{-1}}-\sigma$，$\sigma_+=\sigma_{2^{-1}}+\sigma$。

由

$$(\sigma_+)_N^{**}(f)(x)\leqslant(2^N+1)\sigma_N^{**}(f)(x)$$

与引理3.3，得到

$$\theta^*(f)(x)\leqslant C\sigma_N^{**}(f)(x)\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|\theta*\sigma(y)|(1+|y|)^N dy\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}2^{kN}\int_{\boldsymbol{R}^n}|\theta*(\sigma_-)_{2^{-k}}(y)|(1+|y|)^N dy\right\},$$

其中 C 只依赖于 N。进一步我们有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|\theta*\sigma(y)|(1+|y|)^N dy$$

$$\leqslant\int_{\boldsymbol{R}^n}|\theta(z)|\int_{\boldsymbol{R}^n}|\sigma(y-z)|(1+|y|)^N dydz$$

$$\leqslant\int_{|z|\leqslant 1}|\theta(z)|\int_{R^n}|\sigma(y)|(1+|y-z|)^N\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\leqslant\int_{R^n}|\theta(z)|\mathrm{d}z.$$

注意到

$$\int_{R^n}x^\alpha\sigma_-(x)\mathrm{d}x=0,$$

对 $0<s\leqslant 1$ 便有

$$\theta*(\sigma_-)_s(y)=\int_{R^n}[\theta(y-z)-p_N(z)](\sigma_-)_s(z)\mathrm{d}z,$$

其中 $P_N(z)$ 是任意次数不超过 N 的多项式。特别地，取 P_N 为 θ 的 Taylor 多项式，得到

$$|\theta*(\sigma_-)_s(y)|$$

$$\leqslant\int_{R^n}\frac{|z|^{N+1}}{N!}\int_0^1(1-r)^N\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\theta(y+rz)\right|\mathrm{d}r$$

$$\times|(\sigma_-)_s(z)|\mathrm{d}z,$$

故对 $0<s\leqslant 1$，

$$\int_{R^n}|\theta*(\sigma_-)_s(y)|(1+|y|)^N\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{1}{N!}\int_0^1(1-r)^N\int_{R^n}|z|^{N+1}|(\sigma_-)_s(z)|$$

$$\times\int_{R^n}(1+|y|)^N\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\theta(y+rz)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}r$$

$$\leqslant C\int_{R^n}|z|^{N+1}(1+|z|)^N|(\sigma_-)_s(z)|\mathrm{d}z$$

$$\times\int_{R^n}\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\theta(y)\right|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant Cs^{N+1}\int_{R^n}\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\theta(y)\right|\mathrm{d}y.$$

最后我们得到

$$\theta^*(f)(x)\leqslant C\sigma_N^{**}(f)(x)\left\{\int_{R^n}|\theta(x)|\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}2^{kN}2^{-k(N+1)}\int_{R^n}\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\theta(y)\right|\mathrm{d}y\right\}$$

$$\leqslant C\sigma_N^{**}(f)(x)\left\{\int_{R^n}|\theta(x)|\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_{R^n}\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\theta(y)\right|\mathrm{d}y\right\}.$$

推论3.1 条件同引理3.3，只是 supp $\theta\subseteq\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ |x|\leqslant A\}$，则

$$\theta_A^*(f)(x)\leqslant C\left\{\int_{R^n}|\theta(x)|\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+A^{N+1}\int_{R^n}\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\theta(x)\right|\mathrm{d}x\right\}\sigma_N^{**}(f)(x).$$

证明 对 $\theta_{1/A}(x)=A^n\theta(Ax)$ 用引理3.4，并注意到

$$\int_{R^n}|\theta_{1/A}(x)|\mathrm{d}x=\int_{R^n}|\theta(x)|\mathrm{d}x,$$

$$\int_{R^n}\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\theta_{1/A}(x)\right|\mathrm{d}x=A^{N+1}\int_{R^n}\left|\sum_{|\alpha|=N+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\theta(x)\right|\mathrm{d}x,$$

而

$$(\theta_{1/A})^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|\theta_{t/A}*f(y)|$$

$$=\sup_{|y-x|<At}|\theta_t*f(y)|=\theta_A^*(f)(x).$$

现在回到证明(2)$\Longrightarrow$(3)．对任意 $\varphi\in\mathscr{A}$，作单位分解

$$1=\sum_{m=0}^{\infty}\theta_m(x),$$

其中 θ_0 支于 $|x|\leqslant 2$，θ_m 支于 $2^{m-1}\leqslant|x|\leqslant 2^{m+1}$，$m=1,2,\cdots$，且

$$|\theta_m'(x)|\leqslant C2^{-m},\quad m=0,1,2,\cdots.$$

这时

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi(x)\theta_m(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{\theta}_m(x),$$

其中的级数，对任意 $x\in\boldsymbol{R}^n$，最多只有5项不为0．由推论3.1知

$$\begin{aligned}\varphi^*(f)(x)&\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{\theta}_m^*(f)(x)\\&\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|\tilde{\theta}_m(x)|\,\mathrm{d}x\\&\quad+(2^m)^{N+1}\int_{\boldsymbol{R}^n}\Big|\sum_{|\alpha|=N+1}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}\tilde{\theta}_m(x)\Big|\,\mathrm{d}x\Big\}\sigma_N^{**}(f)(x).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}^n}\sum_{|\alpha|=N+1}\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}\tilde{\theta}_m(x)\Big|\,\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant N+1}\int_{2^{m-1}\leqslant|x|<2^{m+1}}\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}\varphi(x)\Big|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

而在 $2^{m-1}\leqslant|x|\leqslant 2^{m+1}$ 中 $|x|\sim 2^m$，故

$$\varphi^*(f)(x)\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+|x|)^{N+1}\sum_{|\alpha|\leqslant N+1}\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}\varphi(x)\Big|\,\mathrm{d}x\,\sigma_N^{**}(f)(x).$$

用引理3.1以及引理3.3前的说明，便得

$$\|G^*(f)\|_p\leqslant C\|\sigma_N^{**}(f)\|_p\leqslant C\|\sigma^*(f)\|_p\leqslant C\|\varphi^*(f)\|_p.$$

现在证明(1)$\Longrightarrow$(2)．　取 $\Phi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$，　$u(x,t)=\varphi_t*f(x)$，

$U(x,t)=\Phi_t*f(x)$，通过 σ，可以得到

$$\|U^*\|_p\leqslant C\|u^*\|_p.$$

显然，这不等式当取 $U=t|\nabla_x u(x,t)|$ 时也成立。令

$$u^*_{\varepsilon N}(x)=\sup_{|y-x|<t<\varepsilon^{-1}}|u(y,t)|\left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^N\left(\frac{1}{1+\varepsilon|y|}\right)^N.$$

用证明(2)$\Longrightarrow$(3)的类似方法，也可以证得 $\|U^*_{\varepsilon N}\|_p\leqslant C\|u^*_{\varepsilon N}\|_p$ 对所有 $f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ 以及 $0<\varepsilon<1$ 成立，其中 C 是与 f,ε 无关的常数．显然，$U^*_{\varepsilon N}$ 中，如果上确界在锥 $|x-y|<2t<2\varepsilon^{-1}$ 中取，不等式仍然保持成立。令 $\varepsilon\to 0$，有 $u^*_{\varepsilon N}\uparrow u^*(x)$，$U^*_{\varepsilon N}\uparrow U^*(x)$。另外，对任意 $f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，存在 N，使得对任意 $\varepsilon>0$，有 $u^*_{\varepsilon N}$，$U^*_{\varepsilon N}\in L^\infty\cap L^p(\boldsymbol{R}^n)$。

现在假设 $\varphi^+(f)(x)=u^+(x)=\sup\limits_{t>0}|u(x,t)|\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，要证

$$u^*(x)=\varphi^*(f)(x)=\sup_{|x-y|<t}|u(y,t)|\in L^p(\boldsymbol{R}^n).$$

记

$$M(x)=M_r(u^+)(x)=\sup\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(u^+(y))^r\mathrm{d}y\right)^{1/r}.$$

由极大函数定理，知 $\|M_r(u^+)\|_p\leqslant C\|u^+\|_p$，只要 $r<p$。

取定 N，使得对 $\varepsilon>0$ 有 $u^*_{\varepsilon N}\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，我们要证明

$$\|u^*_{\varepsilon N}\|_p\leqslant C\|M(u^+)\|_p,$$

其中 C 与 ε 无关。

为得到上述不等式，只需在集合 $G_{\varepsilon N}=\{x\in\boldsymbol{R}^n:U^*_{\varepsilon N}(x)\leqslant Bu^*_{\varepsilon N}(x)\}$ 上比较 $u^*_{\varepsilon N}(x)$ 与 $M(u^+)(x)$。事实上

$$\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus G_{\varepsilon N}}u^*_{\varepsilon N}(x)^p\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus G_{\varepsilon N}}\left(\frac{U^*_{\varepsilon N}(x)}{B}\right)^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{C^p}{B^p}\int_{\boldsymbol{R}^n}u^*_{\varepsilon N}(x)^p\mathrm{d}x,$$

取 B 充分大，使得$\left(\frac{C}{B}\right)^p\leqslant\frac{1}{2}$. 则

$$\int_{R^n\setminus G_{\varepsilon N}} u_{\varepsilon N}^*(x)^p\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_{R^n} u_{\varepsilon N}^*(x)^p\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_{R^n} u_{\varepsilon N}^*(x)^p\,\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{G_{\varepsilon N}} u_{\varepsilon N}^*(x)^p\mathrm{d}x.$$

我们来证明，当 $x\in G_{\varepsilon N}$ 时，$u_{\varepsilon N}^*(x)\leqslant CM(u^+)(x)$。为此，取 $(y,t)\in R_+^{n+1}$，满足 $|y-x|<t<\varepsilon^{-1}$，且

$$\frac{1}{2}u_{\varepsilon N}^*(x)\leqslant u(y,t)\left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^N\left(\frac{1}{1+\varepsilon|y|}\right)^N.$$

由 $x\in G_{\varepsilon N}$ 知，只要 $|z-x|<2t$，有

$$t|\nabla_z u(z,t)|\left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^N\left(\frac{1}{1+\varepsilon|z|}\right)^N$$

$$\leqslant 2B|u(y,t)|\left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^N\left(\frac{1}{1+\varepsilon|y|}\right)^N.$$

从而

$$t|\nabla_z u(z,t)|\leqslant C|u(y,t)|\left(\frac{1+\varepsilon|z|}{1+\varepsilon|y|}\right)^N\leqslant C|u(y,t)|.$$

令 $P=\left\{\omega\in R^n:|\omega-x|<t,\ |\omega-y|<\frac{t}{2C}\right\}$。只要 $\omega\in P$，就有

$$|u(y,t)|-|u(\omega,t)|\leqslant|u(y,t)-u(\omega,t)|$$

$$\leqslant|\nabla_z u(\tilde{z},t)|\,|y-\omega|\leqslant\frac{t}{2C}|\nabla_z u(\tilde{z},t)|.$$

注意到 $|\tilde{z}-x|\leqslant|\omega-x|+|\omega-\tilde{z}|\leqslant t+|\omega-y|<2t$，故

$$|u(\omega,t)|\geqslant|u(y,t)|-\frac{t}{2C}|\nabla_z u(\tilde{z},t)|$$

$$\geqslant |u(y,t)| - \frac{1}{2}|u(y,t)| = \frac{1}{2}|u(y,t)|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|u(y,t)|\left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^N\left(\frac{1}{1+\varepsilon|y|}\right)^N$$

$$\geqslant \frac{1}{4}u^*_{\varepsilon N}(x).$$

于是

$$M_r^r(u^+)(x) \geqslant \frac{1}{|B(x,2t)|}\int_{B(x,2t)} u^+(w)^r \mathrm{d}w$$

$$\geqslant \frac{1}{|B(x,2t)|}\int_{B(x,2t)} |u(w,t)|^r \mathrm{d}w$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^r |u^*_{\varepsilon N}(x)|^r \frac{|P|}{|B(x,2t)|}$$

$$\geqslant C(u^*_{\varepsilon N}(x))^r,$$

其中C与ε无关。令$\varepsilon \to 0$,最后得到

$$\|u^*\|_p^p = \int_{R^n} u^*(x)^p \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^n} u^*_{\varepsilon N}(x)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_{\varepsilon N}} u^*_{\varepsilon N}(x)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_{\varepsilon N}} M_r(u^+)(x)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{R^n} M_r(u^+)(x)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_{R^n} u^+(x)^p \mathrm{d}x = C\|u^+\|_p^p.$$

为了证明(3)$\Longrightarrow$(4),我们需要下面的引理。

引理3.5 设$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$, $G^*(f)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$,则对任意$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$,只要$|x-x_0|<d$,就有

$$\int_{R^n} f(y)\varphi(y)\,dy \leqslant N(\varphi, x_0, d) G^*(f)(x),$$

其中

$$N(\varphi, x_0, d) = \int_{R^n}\left(1 + \frac{|x - x_0|}{d}\right)^N \sum_{|\alpha| \leqslant N} d^{|\alpha|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi(x)\right| dx. \tag{3.1}$$

证明 令 $\varphi(y) = Ad^{-n}\Phi\left(\frac{y - x_0}{d}\right)$，适当选 A 可使 $\Phi \in \mathscr{A}$。这样，只要 $|x - x_0| < d$，就有

$$\left|\int_{R^n} f(y)\varphi(y)\,dy\right| = \left|A\int_{R^n} f(y) d^{-n}\,\Phi\left(\frac{y - x_0}{d}\right) dy\right|$$

$$= A|\Phi_d * f(x_0)| \leqslant AG^*(f)(x).$$

我们来计算 A。要 $\Phi(y) = A^{-1}d^n\varphi(x_0 + dy) \in \mathscr{A}$，即

$$\frac{1}{A}\int_{R^n}(1 + |y|)^N \sum_{|\alpha| \leqslant N}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \Phi(y)\right| dy$$

$$= \frac{1}{A}\int_{R^n}(1 + |y|)^N \sum_{|\alpha| \leqslant N} d^{n + |\alpha|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi(x_0 + dy)\right| dy$$

$$\leqslant \frac{1}{A}\int_{R^n}\left(1 + \frac{|x - x_0|}{d}\right)^N \sum_{|\alpha| \leqslant N} d^{|\alpha|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi(x)\right| dx \leqslant 1,$$

取 A 为(3.1)中的 $N(\varphi, x_0, d)$，便得引理的结果。

现在来证明(3)$\Longrightarrow$(4)。设 $f \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，

$$G^*(f) = \sup_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{|y - x| < t} |\varphi_t * f(y)| \in L^p(\boldsymbol{R}^n).$$

要证存在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 的调和函数 $u(x,t)$，$u^*(x) \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，且在广义函数意义下

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)。$$

自然的方法是作 f 的 Poisson 积分，但它不一定存在，故乘上收敛因子。令

$$u(x,t)=\lim_{\delta\to 0}\int_{R^n}e^{-\delta|y|^2}P_t(y)f(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\delta\to 0}(P_{t,\delta}*f)(x).$$

这是R_+^{n+1}的调和函数，且在广义函数意义下，当$t\to 0$时收敛于f。下面证明$u^*\in L^p$。记

$$P_t=P_{t,\delta_0}+\sum_{k=1}^{\infty}(P_{t,\delta_k}-P_{t,\delta_{k-1}})=\sum_{k=1}^{\infty}P_t^k,$$

其中$\delta_k=2^{-2k}t^{-2}$。

当$|x-y|<t$时，用引理3.5，经简单计算，知

$$|P_t*f(y)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|P_t^k*f(y)|$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_{R^n}\left(e^{-2^{-2k}\left|\frac{y-z}{t}\right|^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-e^{-2^{-2(k-1)}\left|\frac{y-z}{t}\right|^2}\right)P_t(y-z)f(z)\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}N(\Phi,0,1)G^*(f)(x),$$

其中

$$N(\Phi,0,1)=\int_{R^n}(1+|x|)^N\sum_{|\alpha|\leqslant N}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\Phi(x)\right|\mathrm{d}x,$$

$$\Phi(x)=[e^{-|x|^2}-e^{-4|x|^2}]2^{kn}P(2^kx).$$

为估计$N(\Phi,0,1)$，先看$\alpha=0$的情形：

$$\int_{R^n}(1+|x|)^N|\Phi(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}(1+|x|)^N[e^{-|x|^2}-e^{-4|x|^2}]2^{kn}P(2^kx)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{|x|\leqslant 2^k}+\int_{|x|\geqslant 2^k}=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

$$\mathrm{I}\leqslant C\int_{|x|\leqslant 2^k}|x|^2 2^{kn}P(2^k x)\mathrm{d}x$$

$$=C\int_{|x|\leqslant 1}\left(\frac{|x|}{2^k}\right)^2 P(x)\mathrm{d}x\leqslant C2^{-2k},$$

$$\mathrm{II}\leqslant C\int_{|x|>2^k}|x|^{-2}2^{kn}P(2^k x)\mathrm{d}x\leqslant C2^{-kn}.$$

类似地可以估计$|\alpha|>0$的情形。结果证得

$$|P_t * f(y)|\leqslant CG^*(f)(x).$$

定理3.1至此证毕。今后,由定理3.1所刻画的f,即$\mathrm{Re}H^p(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$的广义函数边值,记为$f\in H^p(\boldsymbol{R}^n)$。

§4.4 注释与进一步的结果

注释

定理1.1在一维的情形,是Hardy-Littlewood在1930年证明的。这里的证明属于Stein-Weiss。定理1.2最早由Burkholder-Gundy-Silverstein于1970年证明[BGS],他们用的是概率的方法。这里用的复方法证明,是P.Koosis于1978年给出的[Ko2],他用到了Fefferman-Stein的思想与Cauchy积分。

引理2.1与定理2.2属于Fefferman-Stein[FS2],但后者的证明思想吸取了A.P.Calderón与E.M.Stein关于调和函数非切向极限存在与面积积分存在的等价性证明的思想,见[C1],[St2]。本章定理2.2的证明,基本上采用了[FS 2]。K.Merryfield在乘积空间的情形,曾给出必要性的一个简化证明,这可以参考本书§11.1以及[Fe 2]。用Merryfield的方法,当然也可以简化定理2.2必要性的证明。P.Koosis还给出了此定理的另一个证法[Ko 3]。定理2.3

也属于 Fefferman-Stein (参见[FS 2])。

§4.3 中的主要结果与证明都来自Fefferman-Stein [FS 2]，但证明中有一部分吸取了[GR]中的方法。

进一步的结果

1. Littlewood-Paley 理论中，有三个基本的算子，这就是

$$g(f)(x)=\left(\int_0^\infty |\nabla u(x,t)|^2 t\ dt\right)^{1/2},$$

$$S(f)(x)=\left(\iint_{\Gamma(x)} |\nabla u(y,t)|^2 t^{1-n} dy\ dt\right)^{1/2},$$

$$g_\lambda(f)(x)=\left(\iint_{R_+^{n+1}} |\nabla u(y,t)|^2\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^{\lambda n} t^{1-n} dydt\right)^{1/2},$$

其中 $u(y,t)=P_t*f(y)$是 f 的 Poisson 积分。当取 $\psi_t=t\nabla P_t$ 时，这里 $g(f)$与 $S(f)$的定义，是预备知识§1.3 中的(3.7)与(3.8)的特殊情形。在那里我们已经证明了 g, S 是L^p 有界的($1<p<\infty$)。一般说来，有

$$g(f)(x)\leqslant CS(f)(x)\leqslant C_\lambda g_\lambda^*(f)(x),$$

而且

$$\|g_\lambda^*(f)\|_p\leqslant A_{p,\lambda}\|f\|_p,$$

只要 $1<p<\infty$, $\lambda>\frac{2}{p}$(见[St 4])。

进一步，还可以得到

$$\|g_\lambda^*(f)\|_p\leqslant A_{p,\lambda}\|f\|_{H^p},\quad \text{只要 } 0<p\leqslant 1, p>\frac{2}{\lambda}.$$

参见[St1],[Gas]。

2. 引理 2.1 在 Fefferman-Stein 理论中起到了重要的作用。

显然，该引理依赖于函数的调和性质。Uchiyama最近推广了这一引理，并由此得到在H^p空间理论中的应用。他考虑$K\in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，$\alpha>0$，令

$$\|K\|_{\Lambda_\alpha}=\sup_B\inf_P|B|^{-1-\frac{\alpha}{n}}\int_B|K(x)-P(x)|\mathrm{d}x,$$

其中P是次数不超过α的多项式，B是$\boldsymbol{R}^n$中的球体。记

$$\Lambda_\alpha(\boldsymbol{R}^n)=\{K\in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n):\ \|K\|_{\Lambda_\alpha}<\infty\},$$

$$\mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{R}^n)=\{K\in\Lambda_\alpha(\boldsymbol{R}^n);\ \operatorname{supp}K\subset B(0,1),\|K\|_{\Lambda_\alpha}\leqslant1\},$$

$$\mathscr{B}'_\alpha(\boldsymbol{R}^n)=\{K\in\Lambda_\alpha(\boldsymbol{R}^n):\ \text{存在}K_j\in\mathscr{B}_\alpha(\boldsymbol{R}^n),$$

$$\text{使得}\ K(x)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}(K_j)_{2^j}(x)\Big\}.$$

设$0<\beta<\alpha,0<\varepsilon<1,0<q\leqslant1,\varphi\in\Lambda_\alpha$，满足

(i) $\varphi\in\mathscr{B}'_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$，

(ii) $\hat{\varphi}(\xi)$当$\xi\neq0$时存在$n+[\alpha]+2$阶微商，且

$$|D_\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi)|\leqslant|\xi|^{1-|\gamma|},\quad\xi\neq0,\ 1\leqslant|\gamma|\leqslant n+[\alpha]+2,$$

(iii) $\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\neq0$。

Uchiyama证明了，若$K\in\mathscr{B}'_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$，$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$，则

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)K(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant C\left(\iint_{\boldsymbol{R}^{n+1}_+}|f*\varphi_t(y)|^qK_{\beta,\varepsilon}(y,t)^qt^{n(q-1)}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q},$$

其中

$$K_{\beta,\varepsilon}(y,t)=t^\beta(1+|y|+t)^{-n-\beta-1+\varepsilon},$$

C仅依赖于$\alpha,\beta,\varepsilon,q,n$和$\varphi$。

例如，取$\varphi_t(x)=P_t(x)$即Poisson核，记$u(x,t)=f*P_t(x)$，

则当$\beta>0$，$\frac{n}{n+\beta}<q\leqslant 1$时，有

$$|u(0,1)|\leqslant C\left(\iint_{R_+^{n+1}}|u(y,t)|^q K_{\beta,\varepsilon}(y,t)^q t^{n(q-1)}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

注意到此时

$$\iint_{R_+^{n+1}}K_{\beta,\varepsilon}(y,t)^q t^{n(q-1)}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}<\infty,$$

上述不等式可以看作引理 2.1 的推广。

Uchiyama 同时证明了上述结果的向量值形式。利用这些结果，他得到了大极大函数(grand maximal function)被径向极大函数控制，以及在 L^p 范数下 S 函数被 g 函数控制等结论，从而证得H^p 空间的一系列刻画(参见[U6],[U7])。

3. 1975年，A.P. Calderón 和 A. Torchinsky 研究了抛物极大函数(Parabolic maximal function)并由此推广了 g 函数与 S 函数。利用这些函数，他们建立了抛物 H^p 空间理论。

设 A_t $(t>0)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 上保留原点不变的仿射变换群，$A_{st}=A_sA_t$。记 A_t 的无穷小生成元为 P，即

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_t=PA_t,$$

$\gamma=\mathrm{tarce}\,P$。并且假设

$$t^{\alpha}|x|\leqslant|A_tx|\leqslant t^{\beta}|x|,\quad 当\ t\geqslant 1,$$

其中 $1\leqslant\alpha\leqslant\beta$。他们首先证明，对任意 $x\in\boldsymbol{R}^n$，存在唯一的 t，使得$|A_t^{-1}x|=1$。定义这时的 $t=\rho(x)$。进而他们证明 $\rho(x-y)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个平移不变距离。对任意 $\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，令

$$\varphi_t(x)=(\det A_t)^{-1}\varphi(A_t^{-1}x),\quad t>0.$$

对 $\psi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，同样定义 ψ_t。对 $f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，

他们定义极大函数、g 函数与 S 函数如下：

$$M_a(f)(x) = \sup_{\rho(y-x)<at} |\varphi_t * f(y)|,$$

$$g(f)(x) = \left\{\frac{1}{\omega}\int_0^\infty |\psi_t * f(x)|^2 \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$S_a(f)(x) = \left\{\frac{1}{\omega}\iint_{\rho(y-x)<at} |\psi_t * f(y)|^2 (at)^{-\gamma} \frac{dydt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$g_\lambda^*(f)(x) = \left\{\frac{1}{\omega}\iint_{R_+^{n+1}} |\psi_t * f(y)| \times \left(1+\frac{\rho(y-x)}{t}\right)^{-2\lambda} t^{-\gamma} \frac{dydt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中由 ρ 定义的单位球的体积，$a>0$。他们证明了，对 $0<p<\infty$，当 $0<p\leqslant 2$，$\lambda>\gamma/p$ 时，或当 $p>2, \lambda>3\gamma/2$ 时，有

$$\|g_\lambda^*(f)\|_p \leqslant C_{p,\lambda}\|M_1(f)\|_p,$$

以及

$$\|M_1(f)\|_p \leqslant C_{p,a}\|S_a(f)\|_p.$$

由此可得这几个函数的 p 模等价性。Calderón-Torchinsky用极大函数定义抛物 H^p 空间。上述结果给出了这种 H^p 空间的各种刻画。

当 P 为单位矩阵时，抛物 H^p 空间就是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的通常的 H^p 空间。若取 $n=2$，$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，这时 $\varphi_t(x_1,x_2)=\frac{1}{t^3}\varphi\left(\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t^2}\right)$。对应于 x_1,x_2 方向的展缩呈抛物性，这就是“抛物”这个名词的由来。抛物 H^p 空间理论可应用于抛物型偏微分方程。有关内容参见[CT1],[CT2]。

4. 1979 年 A. Marcias 与 C. Segovia 在 Coifman-Weiss 齐型空间上利用极大函数建立了 H^p 理论。所谓 Coifman-Weiss 齐

型空间是指对象(X,d,μ)，其中X是一个集合，d是定义在X的一个拟距离，μ是X上的一个满足二倍条件的测度．具体地说，就是d：$X\times X\to\boldsymbol{R}$满足：

(i) $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$；

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$，对任意$x,y\in X$；

(iii) 存在$K>0$，使得对任意$x,y,z\in X$，有

$$d(x,y)\leqslant K[d(x,z)+d(y,z)],$$

而且

$$\mu(B(x,2r))\leqslant A\mu(B(x,r)),$$

其中A与x,r无关，$B(x,r)=\{y|\in X;d(x,y)<r\}$是以$x$为中心以$r$为半径的球．

$\boldsymbol{R}^n$与其上的欧氏距离及Lebesgue测度是Coifman-Weiss齐型空间的最简单的例子．Calderón-Torchinsky的抛物空间$(\boldsymbol{R}^n,\rho,m)$是这种空间的另一个例子，其中$\rho$是由群$A_t$导出的距离，$m$为Lebesgue测度(见上一段3)．

称齐型空间(X,d,μ)为规范的，如果

$$A_1r\leqslant\mu(B(x,r))\leqslant A_2r,$$

其中$B(x,r)$是由距离d定义的以x为中心r为半径的球体．Marcias-Segovia证明了，对每个给定的齐次型空间，都可导出等价拟距离$\delta(x,y)$，使得(X,δ,μ)是规范的齐型空间．

设(X,d,μ)是规范的齐型空间，定义

$$\mathrm{Lip}(\beta)=\{f:|f(x)-f(y)|\leqslant Cd(x,y)^\beta\},$$

其上的范数用$\|f\|_\beta$表示．令

$$E^\alpha=\{f|f\in\mathrm{Lip}(\beta),\ 0<\beta<\alpha\text{ 且 }f\text{ 有有界支集}\}.$$

若f是E^α的一个分布，定义f的γ极大函数

$$f_\gamma^*(x)=\sup\{|\langle f,\psi\rangle|:\psi\in T_\gamma(x)\},$$

其中T_γ是

$$T_\gamma(x)=\{\psi|\text{存在 }r>0,\mathrm{supp}\psi\subset B(x,r),$$
$$r\|\psi\|_\infty\leqslant1,\ r^{1+\gamma}\|\psi\|_\gamma\leqslant1\}.$$

利用 f_γ^*，Marcias-Segovia 定义了如下的 H^p 空间

$$H^p(X)=\{f \mid f\in(E^\alpha)',f_\gamma^*(x)\in L^p(X)\},$$

其中$\frac{1}{1+\gamma}<p\leqslant 1$。参阅[MS1—2]。

Uchiyama（参见[U5]）引入了另一类极大函数

$$f^+(x)=\sup_{r>0}\left|\int_X K(r,x,y)f(y)\mathrm{d}\mu(y)/r\right|,$$

其中 $K(r,x,y)$是定义在 $\boldsymbol{R}^+\times X\times X$ 的非负连续函数且满足一定的条件。Uchiyama 证明了，存在 $p_1<1$，使得当 $p>p_1$ 时

$$C\|f^+\|_p\leqslant\|f_\gamma^*\|_p\leqslant C\|f^+\|_p.$$

5. Folland 与 Stein 在一般的齐次群上建立了 H^p 理论，见[FoS]。

6. 若 $f\in H^p(\boldsymbol{R}^n)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$，一般说来，$f\varphi\notin H^p(\boldsymbol{R}^n)$，$0<p\leqslant 1$。这给偏微分方程的应用带来许多不便。Goldberg[Go]于1979年考虑了局部Hardy 空间

$$h^p(\boldsymbol{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n):\ \sup_{|x-y|<t\leqslant 1}|f*\varphi_t(y)|\in L^p(\boldsymbol{R}^n)\},$$

其中 $\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$。

Goldberg 讨论了 h^p 空间的许多性质，并得到它们在偏微分方程中的应用。

7. 在 H^p 理论中一个值得研究的问题是卷积核的大小、光滑性条件与 H^p 之间的关系，即是否存在一个关于卷积核大小与光滑性条件，准确地刻画 H^p 空间？这个问题最早是由 G. Weiss 于1979年提出来的[We2]。设 $\varphi(x)=\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$，即 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 的特征函数，不难证明，若$\varphi^*(f)\in L^1(\boldsymbol{R})$，则 f 几乎处处为 0。换言之，用 $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$作为卷积核定义极大函数，该极大函数并不

能刻画 $H^1(\boldsymbol{R})$。于是 Weiss 提出下述问题：是否存在 $\varphi\in L^\infty(\boldsymbol{R})$，使得

$$H_\varphi^1(\boldsymbol{R})=\{f\mid f\in L^1(\boldsymbol{R}),\varphi^*(f)\in L^1(\boldsymbol{R})\}\neq\{0\}\text{且 } H_\varphi^1\neq H^1?$$

1983年，Uchiyama 与 Wilson 证明了，存在 $\varphi\in L^\infty(\boldsymbol{R})$，满足 $H_\varphi^1\neq\{0\}$ 且 $H_\varphi^1\neq H^1$，参见[UW]。稍后，韩永生给出了此事实的另一个证明[H9]。

是否存在 φ，使得 $H_\varphi^p(\boldsymbol{R})=\{f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}),\varphi^*(f)\in L^p(\boldsymbol{R})\}\neq\{0\}$，且 $H_\varphi^p\neq H^p$，$0<p<1$？这是一个仍然没有解决的问题。

8. 1983年韩永生在[H8]中利用 Carleson 测度（参见本书第7章），给出了 H_φ^1 的一种刻画。作为推论，他证明了如下的不等式：

$$\sup_{\substack{\varphi\in \mathrm{BMO}\cap\mathscr{S}\\ \|\varphi\|_*\leqslant 1}}\left|\int_{R^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\sim\|f\|_{H^1}$$

（有关 BMO 与$\|\ \|_*$，参看本书第7章），即得到了 H^1 的一种刻画。同时他还利用上述结果证明了，存在 φ 满足下述大小与光滑性条件

(i) $|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{A}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}$,

(ii) $|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant\dfrac{A|h|^\varepsilon}{(1+|x|)^{1+2\varepsilon}}$, 当 $|h|\leqslant\dfrac{|x|}{2}$,

其中 $\varepsilon>0$，使得由 $\varphi^*(f)\in L^1(\boldsymbol{R})$ 可以推出 f 几乎处处为0。有趣的是，Fefferman-Stein 证明了，若 $f\in H^1(\boldsymbol{R})$，则 $\varphi^*(f)\in L^1(\boldsymbol{R})$（见[FS2]）。这两个事实表明，径向极大函数与非切向极大函数仍然有着相当大的差别。一个自然的问题是：径向极大函数与非切向极大函数在 L^p $(0<p\leqslant1)$ 范数意义下相互控制的最弱条件是什么？

第五章　H^p 空间的原子刻画

第四章的 C. Fefferman 与 E.M. Stein 定理表明，历史上来自解析函数的 H^p 空间，可以通过某类极大函数完全刻画出来，本质上与解析函数、调和函数没有关系．这个深刻的结果，无疑是 H^p 空间论研究的突破性的进展．应用 H^p 空间的这种极大函数刻画，可以进一步研究算子在 H^p 空间的作用以及 H^p 空间的对偶、内插等等，但证明都比较复杂．其根源在于用广义函数的某种类型的极大函数刻画 H^p 空间，并没有直接给出广义函数的特征．本章将进一步表明，H^p 空间可以由一类具有很好性质的十分简单的函数经过线性组合生成，这就是所谓原子分解．原子分解的优点，不仅在于给出许多已知结果的简单证明，还可以发现许多新的结果，并且可以把 H^p 空间的理论推广到欧氏空间以外的情形．更进一步，这种把空间"原子化"的研究方法，深刻影响了对函数空间与算子理论的研究．它给分析带来了丰硕的结果．

本章的 §5.1 叙述 H^p 空间的(p,∞)与$(p,2)$原子分解．在 §5.2，叙述一般的(p,q,s)原子分解．一个最重要的定理表明，H^p 空间可以由(p,q,s)原子生成，而与 $q>1$ 及 $s\geq\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 的选择无关，其中 q 来自刻画原子大小的 L^q 模，s 是原子消失矩的数目．

§5.1　H^p 空间的原子刻画

本章将证明，作为由广义函数组成的 $H^p(R^n)$，其元素可以

由很简单的一类函数线性组合而成。这类函数就是所谓原子。

定义1.1 设 $0<p\leqslant1$。我们称定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数 a 是一个 (p,∞)原子，如果

(1) $\operatorname{supp}a\subset Q$，其中 Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的方体；

(2) $\|a\|_\infty\leqslant|Q|^{-1/p}$；

(3) 对任意满足条件 $0\leqslant|\alpha|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$的多重指标$\alpha$，有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}x^\alpha a(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$\alpha_j$ 是非负整数，$\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 表示不超过 $n\left(\frac{1}{p}-1\right)$的最大整数。

条件(1)称为原子的支集条件，(2)称为原子的大小条件，(3)称为原子的消失矩条件。

条件(3)的合理性，在 $p=1$ 时，我们在§3.2中定理2.4的证明之后曾作过解释，即若 $f\in H^1(\boldsymbol{R}^n)$，则 $\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\,\mathrm{d}x=0$，即 f 必须满足消失矩的条件。

定义1.2 定义

$$H^{p,\infty}(\boldsymbol{R}^n)=\left\{f\,\middle|\,\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n),\ f=\sum_{j=1}^\infty\lambda_ja_j,a_j\text{ 是 }(p,\infty)\text{原子，}\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|^p<\infty\right\},$$

$$\|f\|_{H^{p,\infty}}=\inf\left(\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|^p\right)^{1/p},$$

其中下确界是对$f=\sum\lambda_ja_j$ 的一切分解来取的。分解 $f=\sum\lambda_ja_j$的含义是在$\mathscr{S}'$意义下说的。

类似地，可以用 L^2 范数代替 L^∞ 范数而得到：

定义1.3 设 $0<p\leqslant1$。称定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数 a 是一个

$(p,2)$原子，如果

(1) $\operatorname{supp} a \subset Q$，其中$Q$是$\boldsymbol{R}^n$中的方体；

(2) $\|a\|_2 \leqslant |Q|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$；

(3) $\int_{R^n} x^\alpha a(x)\,\mathrm{d}x = 0$，　当$0 \leqslant |\alpha| \leqslant \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$。

显然，(p,∞)原子必为$(p,2)$原子。

定义1.4　定义

$$H^{p,2}(\boldsymbol{R}^n) = \{f \mid \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n), f = \sum \lambda_j a_j, a_j \text{ 是}(p,2)\text{原子}, \sum |\lambda_j|^p < \infty\},$$

$$\|f\|_{H^{p,2}} = \inf \left(\sum |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中下确界是对$f = \sum \lambda_j a_j$的一切分解来取的。

H^p空间原子刻画的一个重要结果是

定理1.1　设$0 < p \leqslant 1$，$f \in \mathscr{S}'$，则下面三个断言等价：

(1) $f \in H^p(\boldsymbol{R}^n)$；

(2) $f \in H^{p,\infty}(\boldsymbol{R}^n)$；

(3) $f \in H^{p,2}(\boldsymbol{R}^n)$。

并且三个空间定义的伪模是等价的。

证明　(2)$\Longrightarrow$(1)。只要证明，对任意(p,∞)原子a，有$a \in H^p$且$\|a\|_{H^p} \leqslant C$，其中C与a无关。这是因为，任意$f \in H^{p,\infty}$，则有$f = \sum \lambda_j a_j$，a_j是(p,∞)原子，$\sum |\lambda_j|^p \leqslant 2\|f\|_{H^{p,2}}^p$。这时

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^p}^p &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \|a_j\|_{H^p}^p \leqslant C^p \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \\ &\leqslant 2C^p \|f\|_{H^{p,2}}^p.\end{aligned}$$

取$\varphi \in \mathscr{D}$，$\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| \leqslant 1\}$，$\int_{R^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$，根据定理3.1，只需证明$\|\varphi^+(a)\|_p \leqslant C$就够了。

设 a 的支集为 Q。不妨设 Q 的中心在原点，否则下面的证明只需经过一个平移就可以了. 这时

$$\int_{R^n}\varphi^+(a)^p(x)\mathrm{d}x=\int_{(2Q)}+\int_{(2Q)^c}=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

对 I，用 Hölder 不等式，并注意 $\varphi^+(f)$ 被 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数控制，有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&\leqslant|Q|^{1-\frac{p}{2}}\left(\int_{(2Q)}\varphi^+(a)^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}\\&\leqslant|Q|^{1-\frac{p}{2}}\|\varphi^+(a)\|_2^p\\&\leqslant C|Q|^{1-\frac{p}{2}}\|M(a)\|_2^p\\&\leqslant C|Q|^{1-\frac{p}{2}}\|a\|_2^p\leqslant C|Q|^{1-\frac{p}{2}}|Q|^{\frac{p}{2}-1}\\&=C.\end{aligned}$$

为估计 II，我们需要 $\varphi^+(a)(x)$ 的一个逐点估计. 当 $x\in(2Q)^c$ 时

$$\begin{aligned}\varphi_t*a(x)&=\int_Q t^{-n}\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)a(y)\mathrm{d}y\\&=\int_Q t^{-n}\left[\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)-P_t(x,y)\right]a(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $P_t(x,y)$ 是 $\varphi\left(\frac{y}{t}\right)$ 在 x 处增量为 $-y$ 的 $N=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 阶 Taylor 多项式. 在这里我们用了原子 $a(y)$ 的消失矩条件。由 $\mathrm{supp}\varphi\subset\{|x|\leqslant1\}$，知

$$t\geqslant|x-y|\geqslant|x|-|y|\geqslant\frac{|x|}{2},$$

故

$$|\varphi_t*a(x)|\leqslant Ct^{-n}\int_Q\left|\frac{y}{t}\right|^{N+1}|a(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\frac{|Q|^{1-\frac{1}{p}+\frac{N+1}{n}}}{|x|^{n+N+1}},$$

对 t 取上确界便知 $\varphi^{+}(a)(x)$ 满足相同的估计。因此

$$\text{II}\leqslant C\int_{(2Q)^c}\frac{|Q|^{(p-1)+\frac{p(N+1)}{n}}}{|x|^{p(n+N+1)}}\mathrm{d}x.$$

由于 $\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]>n\left(\frac{1}{p}-1\right)-1$，知 $p(n+N+1)>p+n>n$。故上面的积分收敛. 容易计算得

$$\text{II}\leqslant C.$$

这就证明了(2)$\Longrightarrow$(1)。

值得指出的是，上面的证明对$(p,2)$原子也是成立的。

(1)$\Longrightarrow$(3) 我们要证明的是，每一个 H^p 的广义函数 f，具有$(p,2)$原子分解. 先假设 $f\in L^2\cap H^p$。记 $u(y,t)$为 f 的 Poisson 积分。

取 $\psi\in\mathscr{D}$是径向函数，$\operatorname{supp}\psi\subset\{|x|\leqslant 1\}$，且

$$\int_{R^n}x^{\alpha}\psi(x)\mathrm{d}x=0,\quad 当\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant N(p)=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right], \tag{1.1}$$

且

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}\hat{\psi}(u)\mathrm{d}u=-1. \tag{1.2}$$

这样的函数是存在的，因为容易看到，存在径向函数 $h\in\mathscr{D}$，支于$\{|x|\leqslant 1\}$。这时 $\psi(x)=\Delta^k h(x)$便满足(1.1)，其中Δ是Laplace算子。由于 $\hat{\psi}(\xi)=(-2\pi|\xi|^2)^k\hat{h}(\xi)$，便知$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\hat{\psi}(0)=0$。这就是(1.1)。对 ψ 乘上合适的常数，便可使(1.2)成立。

这样

$$f=\iint_{R_+^{n+1}}\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\psi_t(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty tf*\frac{\partial}{\partial t}P_t*\psi_t\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

这可以通过 Fourier 变换看出．因为右边的 Fourier变换为

$$-\int_0^\infty t|\xi|\mathrm{e}^{-|\xi|t}\hat{\psi}(\xi t)\hat{f}(\xi)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=-\hat{f}(\xi)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\hat{\psi}(u)\mathrm{d}u$$

$$=\hat{f}(\xi).$$

对 $k\in\boldsymbol{Z}$，令

$$E_k=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ u^*_{10^n}(x)>2^k\}=\bigcup_{j=1}^\infty Q_j^k,$$

其中 Q_j^k 是 E_k 的 Whitney 分解．对方体 Q，定义

$$\hat{Q}=\{(y,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ y\in Q,\ 0<t<l(Q)\},$$

其中 $l(Q)$表示Q的边长．令

$$\hat{E}_k=\bigcup_j\hat{Q}_j^k,\quad T_j^k=\hat{Q}_j^k\backslash\hat{E}_{k+1}$$

（见图 5）．显然，$\bigcup E_k=\boldsymbol{R}^n$，$\bigcup_{j,k}T_j^k=\boldsymbol{R}_+^{n+1}$．因此

$$f=\sum_{k,j}\int_{T_j^k}\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\psi_t(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k,j}g_j^k=\sum_{k,j}\lambda_j^k a_j^k,$$

其中

$$\lambda_j^k=C2^k|Q_j^k|^{1/p},$$

$$a_j^k=(\lambda_j^k)^{-1}\int_{T_j^k}\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\psi_t(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

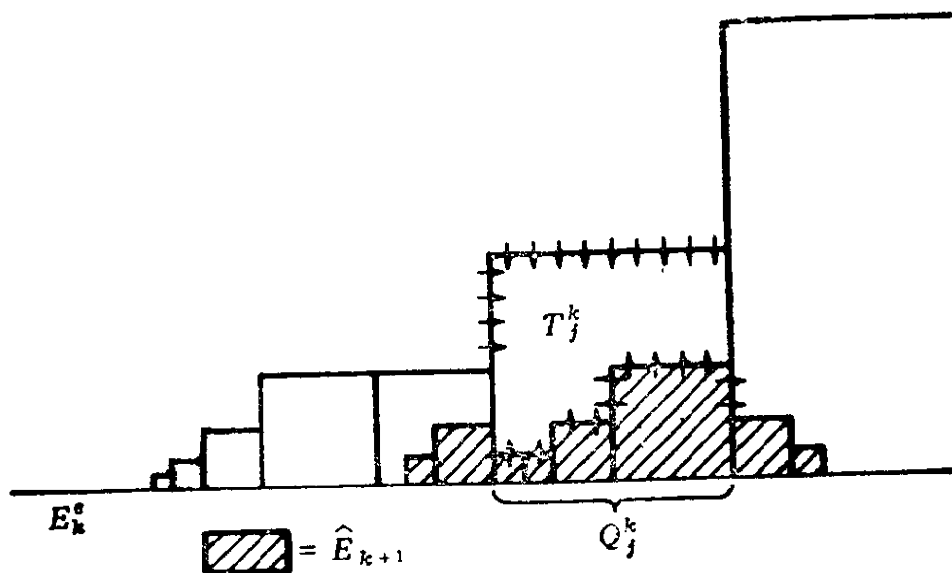


图 5

这时

$$\sum_{j,k}|\lambda_j^k|^p=C^p\sum_{k,j}2^{kp}|Q_j^k|=C^p\sum_k 2^{kp}|E_k|$$

$$\leqslant C^p\int_{R^n}u_{10^n}^*(x)^p\mathrm{d}x\leqslant C^p\|f\|_{H^p}^p.$$

剩下只要验证 a_j^k 是$(p,2)$原子。由 $\mathrm{supp}\psi\subset\{|x|\leqslant 1\}$ 知 $\mathrm{supp}a_j^k\subset 10Q_j^k$。同样，由 ψ 满足消失矩条件(1.1)可知 a_j^k 满足消失矩条件。下面证明，只要适当取C，便可使

$$\|a_j^k\|_2\leqslant|Q_j^k|^{1/2-1/p},$$

或等价地有

$$\|g_j^k\|_2\leqslant C2^k|Q_j^k|^{1/2}。\tag{1.3}$$

事实上，对任意 $h\in L^2$，$\|h\|_2\leqslant 1$，有

$$\left|\int_{R^n}h(x)g_j^k(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{T_j^k}\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}(\psi_t*h)(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left(\int_{T_j^k}t|\nabla u|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\left(\int_{R_+^{n+1}}|(\psi_t*h)(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac12}.\tag{1.4}$$

用 Plancherel 公式

$$\int_{R_+^{n+1}}|\psi_t*h(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}=\int_0^\infty\int_{R^n}|\widehat{\psi_t*h}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\int_0^\infty\int_{R^n}|\hat{\psi}(\xi t)\hat{h}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\int_{R^n}|\hat{h}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\int_0^\infty|\hat{\psi}(u)|^2\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$=C\|h\|_2^2\leqslant C. \tag{1.5}$$

用 Green 公式

$$\int_{T_j^k}t|\nabla u|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant\int_{\partial T_j^k}\left(tu|\nabla u|+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial t}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

注意到 $u^*_{10^n}$ 中的宽度 10^n，由§4.2中引理2.3，知在 ∂T_j^k 上有

$$|u|\leqslant C2^k,\quad t|\nabla u|\leqslant C2^k.$$

再注意到 $\left|\frac{\partial t}{\partial n}\right|\leqslant 1$，$|\partial T_j^k|\leqslant C|Q_j^k|$，便得到

$$\int_{T_j^k}t|\nabla u|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant C2^{2k}|Q_j^k|.$$

把这与(1.5)代回(1.4)，再在(1.4)中对 $\|h\|_2\leqslant 1$ 取上确界，便证明了(1.3)．从而得到了 f 的$(p,2)$原子分解．

在§4.2引理2.2的证明中，我们已知 $L^2\cap H^p$ 在 H^p 稠密．因此，对一般的 $f\in H^p$，存在 $f_n\in L^2\cap H^p$，使得

$$f=\sum_m f_m,\qquad \sum\|f_m\|_{H^p}^p\leqslant C^p\|f\|_{H^p}^p.$$

已证 f_m 有$(p,2)$原子分解，即

$$f_m=\sum_j \lambda_j^m a_j^m,$$

其中 a_j^m 是$(p,2)$原子，$\sum_j|\lambda_j^m|^p\leqslant C^p\|f_m\|_{H^p}^p$。这样

$$f=\sum_m\sum_j \lambda_j^m a_j^m,$$

而

$$\sum_{m,j}|\lambda_j^m|^p\leqslant\sum_m\sum_j|\lambda_j^m|^p\leqslant C^p\sum_m\|f_m\|_{H^p}^p$$
$$\leqslant C^p\|f\|_{H^p}^p.$$

这就证明了(1)$\Longrightarrow$(3)。

(3)$\Longrightarrow$(2)。用类似于刚刚作的推理，只要证明每一个$(p,2)$原子 a，都可以有(p,∞)原子分解就足够了。

先考虑$\frac{n}{n+1}<p\leqslant 1$的情形。这时$N=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]=0$。设$a$是$(p,2)$原子，$\operatorname{supp}a\subset Q$，$\|a\|_2\leqslant|Q|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$。记$b(x)=|Q|^{\frac{1}{p}}a(x)$，则$\|b\|_2^2\leqslant|Q|$。令$M_2(f)=M(|f|^2)^{1/2}$，其中$M$表示Hardy-Littlewood 极大函数算子。记

$$U_\alpha=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M_2(b)(x)>\alpha\}$$
$$=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(b^2)(x)>\alpha^2\}.$$

只要取 α 充分大，有 $U_\alpha\subset 2Q$。这是因为，当 $x\notin 2Q$时，

$$M(b^2)(x)\leqslant\frac{\|b\|_2^2}{C_n(\operatorname{dist}(x,Q))^n}\leqslant\frac{2^n}{C_n},$$

其中 C_n 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 单位球体积。因此，只要$\alpha>\sqrt{2^n/C_n}$，便有$U_\alpha\subset 2Q$。α 的大小在下面才最后确定。

对 U_α 作 Whitney 分解：$U_\alpha=\bigcup Q_j$。这时存在常数 $C>1$，使得

$$\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant C\alpha.$$

对 b 作 Calderón-Zygmund 分解：

$$b(x)=g_0(x)+\sum_j h_j(x),$$

其中

$$g_0(x)=\begin{cases}b(x), & \text{当 } x\notin U_\alpha\\ \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j}b(y)\mathrm{d}y, & \text{当 } x\in Q_j,\end{cases}$$

$$h_j(x)=\begin{cases}b(x)-\dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j}b(y)\mathrm{d}y, & \text{当 } x\in Q_j\\ 0, & \text{当 } x\notin Q_j.\end{cases}$$

显然，$|g_0(x)|\leqslant C\alpha$，$\int g_0(x)\mathrm{d}x=0$，

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|h_j(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b(y)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2C\alpha.$$

记$b_j(x)=\dfrac{1}{2C\alpha}h_j(x)$，则 $\mathrm{supp}\,b_j\subset Q_j$，$\|b_j\|_2^2\leqslant|Q_j|$. 用$b_j$ 代替 b，作同样的分解，并继续下去，便得

$$\begin{aligned}b(x)&=g_0(x)+2C\alpha\sum_{j_0}\left(g_{j_0}(x)+\sum_{j_1}h_{j_0j_1}(x)\right)\\&=g_0(x)+2C\alpha\sum_{j_0}g_{j_0}(x)+(2C\alpha)^2\sum_{j_0j_1}b_{j_0j_1}(x)\\&=g_0(x)+2C\alpha\sum_{j_0}g_{j_0}(x)+(2C\alpha)^2\sum_{j_0j_1}g_{j_0j_1}(x)\\&\quad+\cdots+(2C\alpha)^k\sum_{j_0,\cdots,j_k}h_{j_0j_1\cdots j_k},\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{supp} h_{j_0\cdots j_k} \subset Q_{j_0\cdots j_k},$$

而

$$\bigcup_{j_k} Q_{j_0\cdots j_k} = \{x \in \boldsymbol{R}^n:\ M(b^2_{j_0\cdots j_{k-1}})(x) > \alpha^2\},$$

$$\frac{1}{|Q_{j_0\cdots j_k}|}\int_{Q_{j_0\cdots j_k}} |h_{j_0\cdots j_k}(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2C\alpha.$$

根据算子M的弱(1,1)型，有常数C_1，使

$$\begin{aligned}
&(2C\alpha)^k \int_{R^n} \left| \sum_{j_0,\cdots,j_k} h_{j_0\cdots j_k}(x) \right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant (2C\alpha)^{k+1} \sum_{j_0,\cdots,j_k} |Q_{j_0\cdots j_k}| \\
&= (2C\alpha)^{k+1} \sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}} |\{x \in \boldsymbol{R}^n:\ M(b^2_{j_0\cdots j_{k-1}})(x) > \alpha^2\}| \\
&\leqslant (2C\alpha)^{k+1}(C_1\alpha^{-2}) \sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}} \int_{R^n} |b_{j_0\cdots j_{k-1}}(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant (2C\alpha)^{k+1}(C_1\alpha^{-2}) \sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}} |Q_{j_0\cdots j_{k-1}}| \\
&\leqslant \cdots \leqslant \\
&\leqslant (2C\alpha)^{k+1}(C_1\alpha^{-2})^k \sum_{j_0} |Q_{j_0}| \\
&\leqslant (2CC_1\alpha^{-1})^{k+1}|Q| \to 0 \quad (k \to \infty),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

只要$\alpha > 2CC_1$。这样我们便得到了

$$b(x) = g_0(x) + 2C\alpha \sum_{j_0} g_{j_0}(x) + (2C\alpha)^2 \sum_{j_0,j_1} g_{j_0 j_1}(x)$$

$$+\cdots+(2Ca)^k\sum_{j_0,\cdots,j_k} g_{j_0\cdots j_k}(x)+\cdots,$$

其中右边的级数按 L^1 范数收敛到左边。令

$$a_0(x)=\frac{1}{Ca}\left(\frac{1}{|2Q|}\right)^{-1/p} g_0(x),$$

$$a_{j_0\cdots j_k}(x)=\frac{1}{Ca}\left(\frac{1}{|2Q_{j_0\cdots j_k}|}\right)^{-1/p} g_{j_0\cdots j_k}(x).$$

显然它们都是(p,∞)原子，而

$$a(x)=Ca|Q|^{-\frac{1}{p}}\Big\{|Q|^{\frac{1}{p}}a_0(x)+2Ca\sum_{j_0}|Q_{j_0}|^{\frac{1}{p}}a_{j_0}(x)$$

$$+(2Ca)^2\sum_{j_0,j_1}|Q_{j_0j_1}|^{\frac{1}{p}}a_{j_0j_1}(x)+\cdots+$$

$$+(2Ca)^k\sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|Q_{j_0\cdots j_{k-1}}|^{\frac{1}{p}}a_{j_0\cdots j_{k-1}}(x)+\cdots\Big\}.$$

剩下来只需验证(p,∞)原子 $a_{j_0\cdots j_k}$的系数的 p 幂之和收敛。事实上，由(1.6)知

$$\sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|Q_{j_0\cdots j_{k-1}}|\leqslant(C_1a^{-2})^k|Q|,$$

故原子$a_{j_0\cdots j_k}$系数的 p 幂之和

$$\leqslant(Ca)^p|Q|^{-1}\Big\{|Q|+(2Ca)^p\sum_{j_0}|Q_{j_0}|$$

$$+(2Ca)^{2p}\sum_{j_0,j_1}|Q_{j_0j_1}|$$

$$+\cdots+(2Ca)^{kp}\sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|Q_{j_0\cdots j_{k-1}}|+\cdots\Big\}$$

$$\leqslant (Ca)^p \sum_{k=0}^{\infty} ((2C)^p C_1 a^{p-2})^k < \infty,$$

因为只要 $a > 2CC_1$，有$(2C)^p C_1 a^{p-2} < 1$。

当$p \leqslant \frac{n}{n+1}$时，对上面的证明只需作一些修改，便可得到分解中的$a_{j_0 \cdots j_k}$满足高阶的消失矩条件，从而完成所需要的证明。这些修改是取

$$g_0(x) = \begin{cases} b(x), & \text{当 } x \notin U_a, \\ P_{Q_j}(b)(x), & \text{当 } x \in Q_j, \end{cases}$$

其中 $P_{Q_j}(b)(x)$是次数不超过$N = \left[n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right]$的多项式，使得

$$\int_{Q_j} b(x) x^\alpha \mathrm{d}x = \int_{Q_j} P_{Q_j}(b)(x) x^\alpha \mathrm{d}x, \quad \text{当} 0 \leqslant |\alpha| \leqslant N.$$

容易看出，这样的多项式是存在的（可参看 § 5.2的命题 2.1)。类似地定义$g_{j_0 j_1 \cdots j_k}$。这样我们便完成了定理1.1的证明。

下面我们给出 H^p 空间的 S 函数（广义面积积分）刻画，同时也提供了 H^p 空间的$(p,2)$原子分解的另一个证明.

设 $f \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，$\psi \in \mathscr{D}$ 是径向函数，$\operatorname{supp} \psi \subset \{|x| \leqslant 1\}$，$\int_{R^n} \psi(x) x^\alpha \mathrm{d}x = 0$，当 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant N$，且

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi t)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1, \quad \text{当 } \xi \neq 0.$$

回忆 f 的 S 函数，它定义为

$$S_a(f)(x) = \left(\iint_{\Gamma_a(x)} |\psi_t * f(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y \mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/2}.$$

当 $a = 1$时，简记 $S_a(f)$为 $S(f)$.

定理1.2 设 $f \in H^{p,2}$，$0 < p \leqslant 1$，则 $S(f) \in L^p$且

$$\|S(f)\|_p \leqslant C \|f\|_{H^{p,2}}.$$

证明 类似于定理1.1中(2)⟹(1)的证明，只需对每个$(p, 2)$原子a，证明$\|S(a)\|_p \leqslant C$，其中C不依赖于a。事实上，不妨设a支于以原点为中心的方体Q。这时

$$\|S(a)\|_p^p = \int_{2Q} S(a)^p(x)\mathrm{d}x + \int_{(2Q)^c} S(a)^p(x)\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}。$$

由S的(2,2)型与Hölder不等式，便可得到$\mathrm{I} \leqslant C$。为估计II，设$x \notin 2Q$，$\frac{n}{n+1} < p \leqslant 1$，则

$$|\psi_t * a(y)| = \left|\int_Q t^{-n}\psi\left(\frac{y-z}{t}\right)a(z)\mathrm{d}z\right|$$

$$= \left|\int_Q t^{-n}\left[\psi\left(\frac{y-z}{t}\right) - \psi\left(\frac{y}{t}\right)\right]a(z)\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant \int_Q \frac{1}{t^{n+1}}|z||a(z)|\mathrm{d}z \leqslant \frac{|Q|^{1+1/n-1/p}}{t^{n+1}}. \qquad (1.7)$$

注意到$\operatorname{supp}\psi \subset \{|x| \leqslant 1\}$，当$x \notin 2Q, z \in Q, y \in \Gamma(x)$时，$|x-y| < t$，$|y-z| < t$，从而

$$2t \geqslant |x-y| + |y-z| \geqslant |x-z| \geqslant |x| - |z| \geqslant |x|/2.$$

记$\chi(x)$为R^n单位球的特征函数，则

$$S(a)^2(x) \leqslant \int_{\frac{|x|}{4}} \int_{R^n} \chi\left(\frac{y-x}{t}\right)|\psi_t * a(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^{n+1}}$$

$$\leqslant \int_{|x|/4}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2n+3}} \cdot |Q|^{2+\frac{2}{n}-\frac{2}{p}}$$

$$= C\frac{|Q|^{2+\frac{2}{n}-\frac{2}{p}}}{|x|^{2n+2}}.$$

故

$$\text{II}\leqslant C|Q|^{p+\frac{p}{n}-1}\int_{(2Q)^c}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^{p(n+1)}}\leqslant C.$$

对于一般$\frac{n}{n+k+1}<p\leqslant\frac{n}{n+k}$，利用$a$具有高阶消失矩，在(1.7)的推导中，通过减去$\psi$的Taylor多项式，便可得到估计

$$S(a)(x)\leqslant C|Q|^{\frac{k+1}{n}+1-\frac{1}{p}}/|x|^{(n+k+1)},\quad 当x\notin 2Q,$$

从而证得$\text{II}\leqslant C$。

定义1.5 设$f\in\mathscr{S}'$。我们称f在无穷远处弱为0，如果对任意$\varphi\in\mathscr{S}$，有$f*\varphi_t\to 0(\mathscr{S}')$，当$t\to\infty$。

上述定义等价于，对任意$\varphi\in\mathscr{S},\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\neq 0$，有$\varphi_t*f\to 0$ $(\mathscr{S}')$，当$t\to\infty$。这是因为，假如$\psi\in\mathscr{S},\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，则取$\varphi\in\mathscr{S}$，$\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\neq 0$，便有$f*\psi_t=f*(\psi+\varphi)_t-f*\varphi_t\to 0$ $(\mathscr{S}')$，当$t\to\infty$。

由于当$1\leqslant p<\infty$时，

$$\|f*\varphi_t\|_\infty\leqslant\|f\|_p\|\varphi_t\|_{p'}=t^{-1/p}\|f\|_p\|\varphi\|_{p'},$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，知当$f\in L^p(1\leqslant p<\infty)$，便有$f$在无穷远处弱为0。

当$f\in H^p$，$0<p\leqslant 1$，有$\varphi^*(f)\in L^p$，从而

$$|f*\varphi_t(x)|^p\leqslant\frac{1}{C_n t^n}\int_{|y-x|<t}\varphi^*(f)^p(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{1}{C_n t^n}\|\varphi^*(f)\|_p^p,$$

其中C_n是$\boldsymbol{R}^n$单位球的体积，故f在无穷远处弱为0。

定理1.3 若$f\in\mathscr{S}'$，$S(f)\in L^p(0<p\leq 1)$，且f在无穷远处弱为0，则$f\in H^{p,2}$。

为证明此定理，我们用下面的 Calderón 表示定理。

定理1.4 若$\psi\in\mathscr{S}$，$\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，对任意$\xi\neq 0$，

$$\int_0^\infty|\hat{\psi}(\xi t)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}=C\neq 0,$$

则对任意$f\in\mathscr{S}'$，f在无穷远处弱为0，有

$$f=\frac{1}{C}\int_0^\infty f*\psi_t*\psi_t\frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{1.8}$$

最后一个等式成立的意义是

$$\frac{1}{C}\int_\varepsilon^A f*\psi_t*\psi_t\frac{\mathrm{d}t}{t}\to f\ (\mathscr{S}')$$

当$\varepsilon\to 0$，$A\to\infty$。

证明 不妨设$C=1$。令

$$\alpha(x)=\int_0^\infty\psi_t*\psi_t(x)\frac{\mathrm{d}t}{t},\qquad\beta(x)=\int_1^\infty\psi_t*\psi_t(x)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

则显然

$$\hat{\alpha}(\xi)=\int_0^1\hat{\psi}(\xi t)\hat{\psi}(\xi t)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

$\hat{\alpha}\in C^\infty$，$\hat{\alpha}(0)=0$。由$\psi\in\mathscr{S}$，知在$|\xi|\geq\varepsilon>0$，积分

$$\int_1^\infty\hat{\psi}(\xi t)\hat{\psi}(\xi t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

以及它对ξ的偏导数一致收敛且速降，因此$\hat{\beta}\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})$。但$\hat{\beta}=1-\hat{\alpha}$，故$\hat{\beta}$在$\xi=0$也无穷次可微，因而$\hat{\beta}\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，于是$\beta\in\mathscr{S}$。注意到

$$\beta_s=\int_1^\infty\psi_{ts}*\psi_{ts}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_s^\infty\psi_t*\psi_t\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

有

$$\int_{\varepsilon}^{A} \psi_t * \psi_t \frac{\mathrm{d}t}{t} = \beta_\varepsilon - \beta_A,$$

故

$$\int_{\varepsilon}^{A} f * \psi_t * \psi_t \frac{\mathrm{d}t}{t} = f * \beta_\varepsilon - f * \beta_A.$$

由$\beta \in \mathscr{S}$,

$$\int_{R^n} \beta(x)\mathrm{d}x = 1 - \int_{R^n} \alpha(x)\mathrm{d}x = 1 - \hat{\alpha}(0) = 1,$$

知当$\varepsilon \to 0$时，$\beta_\varepsilon * f \to f(\mathscr{S}')$。而$f$在无穷远处弱为0蕴含了$f * \beta_A \to 0(\mathscr{S}')$，当$A \to \infty$。这就证明了定理1.4。

其实，形式上看，(1.8)是明显的，因为等式右边的 Fourier 变换为

$$\int_0^\infty \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(\xi t)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \hat{f}(\xi)\int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi t)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \hat{f}(\xi).$$

定理1.3的证明 证明的思路类似于定理1.1中的(1)$\Longrightarrow$(3)，只是这里用S函数代替那里的极大函数u^*。

由Calderón 表示定理

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{R^n} f * \psi_t(y)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}.$$

令$\Omega_k = \{x \in \boldsymbol{R}^n: S(f)(x) > 2^k\}$，$k \in \boldsymbol{Z}$。$\mathscr{B}$是$\boldsymbol{R}^n$中全体二进方体构成的集合。

$$\mathscr{B}_k = \left\{Q \in \mathscr{B}: |Q \cap \Omega_k| > \frac{1}{2}|Q|,\ |Q \cap \Omega_{k+1}| \leqslant \frac{|Q|}{2}\right\}.$$

显然，对每个$Q \in \mathscr{B}$，存在唯一的k，使得$Q \in \mathscr{B}_k$。记Q_k^l为$\mathscr{B}_k$中的极大方体，即$Q_k^l \in \mathscr{B}_k$，且若$Q \in \mathscr{B}_k$，$Q \cap Q_k^l \neq \varnothing$，则$Q \subset Q_k^l$。又记

$$\tilde{Q} = \{(y,t) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}: y \in Q,\ l(Q) < t \leqslant 2l(Q)\},$$

$$\tilde{Q}_k^l = \bigcup_{\substack{Q \subseteq Q_k^l \\ Q \in \mathscr{D}_k}} \tilde{Q}.$$

显然

$$R_+^{n+1} = \bigcup_k \bigcup_l \tilde{Q}_k^l.$$

这样

$$f(x) = \sum_k \sum_l \int_{\tilde{Q}_k^l} f * \psi_t(y) \psi_t(x-y) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \sum_k \sum_l \lambda_{kl} a_k^l(x),$$

其中

$$\lambda_{kl} = |Q_k^l|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\int_{\tilde{Q}_k^l} |f * \psi_t(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_k^l(x) = \lambda_{kl}^{-1} \int_{\tilde{Q}_k^l} f * \psi_t(y) \psi_t(x-y) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}.$$

注意到$\mathrm{supp}\,\psi \subset \{|x| \leqslant 1\}$，不难看出$\mathrm{supp}\, a_k^l \subset 5Q_k^l$。而

$$\|a_k^l\|_2 \leqslant \sup_{\|b\|_2 \leqslant 1} \left| \int_{R^n} a_k^l(x) b(x) \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \sup_{\|b\|_2 \leqslant 1} \left(\int_0^\infty \int_{R^n} f * \psi_t(y) \right.$$

$$\left. \times b * \psi_t(y) \chi_{\tilde{Q}_k^l}(y,t) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t} \right) \lambda_{kl}^{-1}$$

$$\leqslant \sup |Q_k^l|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\int_{R_+^{n+1}} |b * \psi_t(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant |Q_k^l|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

由ψ的消失矩条件，可知a_k^l满足所需要的消失矩条件。故a_k^l是$(p,2)$

原子。

为估计$\sum_{k,l}|\lambda_{kl}|^p$，我们断言

$$\sum_{Q\in\mathscr{F}_k}\int_{\tilde{Q}}|f*\psi_t(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}=\sum_l\int_{\tilde{Q}_k^l}|f*\psi_t(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C2^{2k}|\Omega_k|. \tag{1.9}$$

先假定(1.9)成立，则利用离散形式的Hölder不等式，有

$$\sum_{k,l}|\lambda_{kl}|^p\leqslant\sum_k\sum_l|Q_k^l|^{1-p/2}\left(\int_{\tilde{Q}_k^l}|f*\psi_t(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right)^{p/2}$$

$$\leqslant\sum_k\left(\sum_l|Q_k^l|\right)^{1-\frac{p}{2}}\left(\sum_l\int_{\tilde{Q}_k^l}|f*\psi_t(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant C\sum_k|\Omega_k|^{1-\frac{p}{2}}(2^{2k}|\Omega_k|)^{\frac{p}{2}}\leqslant C\sum_k 2^{kp}|\Omega_k|$$

$$\leqslant C\|S(f)\|_p^p.$$

现在回过头来证明(1.9)。令

$$\Omega_k^*=\left\{x\in\boldsymbol{R}^n:\quad M(\chi_{\Omega_k})(x)>\frac{1}{2}\right\},$$

其中M表示Hardy-Littlewood 极大函数算子。由 M 的 弱(1,1)型知，$|\Omega_k^*|\leqslant C|\Omega_k|$。故

$$\int_{\Omega_k^*\setminus\Omega_{k+1}}S^2(f)(x)\mathrm{d}x\leqslant 2^{2(k+1)}|\Omega_k^*|\leqslant C2^{2k}|\Omega_k|.$$

而

$$\int_{\Omega_k^*\setminus\Omega_{k+1}}S^2(f)(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f*\psi_t(y)|^2\chi(x,y,t)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{n+1}}$$

$$\geqslant \sum_{Q\in\mathscr{B}_k}\int_{\tilde{Q}}\int_{R^n}|f*\psi_t(y)|^2\chi(x,y,t)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t^{n+1}}, \qquad (1.10)$$

其中$\chi(x,y,t)$是集合

$$\{(x,y,t)\mid x\in\Omega_k^*\backslash\Omega_{k+1},\ |x-y|<t\}$$

的特征函数。对任意$(y,t)\in\tilde{Q}$，若$x\in Q$，则$|y-x|<t$。而由$\mathscr{B}_k$的定义，若$x\in Q$，$Q\in\mathscr{B}_k$，则由$|Q\cap\Omega_k|\geqslant\frac{1}{2}|Q|$知$x\in\Omega_k^*$。故$Q\subset\Omega_k^*$，从而$|Q\cap\Omega_k^*|=|Q|$。于是

$$\begin{aligned}\int_{R^n}\chi(x,y,t)\mathrm{d}x&\geqslant|Q\cap(\Omega_k^*\backslash\Omega_{k+1})|\\&=|Q\cap\Omega_k^*|-|Q\cap\Omega_{k+1}|\\&\geqslant|Q|-\frac{|Q|}{2}=Ct^n。\end{aligned}$$

把这代回(1.10)，便得到(1.9)。定理1.3因而获证。

结合定理1.1，我们便有

推论1.1 设$f\in\mathscr{S}'$。则$f\in H^p$的充分必要条件是$S(f)\in L_p$且f在无穷远处弱为0。并且$\|S(f)\|_p$与$\|f\|_{H^p}$是等价模。

推论1.1与§4.2中定理2.2的结论形式上是相同的，但实际上有区别。在§4.2，定理2.2中的面积积分是用Poisson核定义的，而推论1.1的S函数是对一般的ψ而言的，ψ_t*f没有任何的调和性，因而§4.2中定理2.2的证明不能直接搬过来。

推论1.2 对由任意满足条件的φ所定义的极大算子$\varphi^*(f)$以及由任意满足条件的ψ所定义的S函数$S(f)$，有

$$\|\varphi^*(f)\|_p\sim\|S(f)\|_p, \quad 0<p\leqslant1.$$

§5.2 原子 H^p 空间

在上一节，我们引入了(p,∞)原子与$(p,2)$原子，并证明了H^p空间可由它们生成。事实上，可以引进更一般的原子概念。

定义2.1 设$0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p<q$，$s\geqslant s_0$，其中

$$s_0=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$$

是不超过$n\left(\frac{1}{p}-1\right)$的最大整数。我们称函数$a$为$(p,q,s)$原子，如果$a\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$，且满足：

(1) $\operatorname{supp} a\subset Q$；

(2) $\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q|a(x)|^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\leqslant|Q|^{-\frac{1}{p}}$，即$\|a\|_q\leqslant|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$；

(3) $\int_{\boldsymbol{R}^n}a(x)x^\alpha\mathrm{d}x=0$，对一切多重指标$\alpha$，$0\leqslant|\alpha|\leqslant s$，成立。

通常，(1)称为(p,q,s)原子的支集条件，(2)称为大小条件，(3)称为消失矩条件。特别地，当$q=\infty$，$s=s_0$时，(p,q,s)原子就是(p,∞)原子。当$q=2$时，(p,q,s)原子就是$(p,2)$原子。

如同上一节那样，我们可以类似地考虑H^p空间作为某类广义函数，它具有(p,q,s)原子分解。在前面，我们取的广义函数为$\mathscr{S}'$，也就是说是在空间$\mathscr{S}'$中划分出子类H^p。由于$\mathscr{S}'$过大，有时不能准确刻画出H^p的性质。下面我们将统一地把H^p放在一类小一些的合适的广义函数空间进行考虑。

命题2.1 设g是$\boldsymbol{R}^n$上任意一个局部可积函数，Q是$\boldsymbol{R}^n$中任意方体，s是任意非负整数，则存在唯一的次数不超过s的多项式$P_Q(g)$，使得

$$\int_Q[g(x)-P_Q(g)(x)]x^\alpha\mathrm{d}x=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant s. \qquad (2.1)$$

证明　记$\mathscr{P}_s$为次数不超过 s 的多项式全体构成的集合。显然，它是有限维的，$x^\alpha(0\leqslant|\alpha|\leqslant s)$构成它的一组基。对

$$L^2\left(Q,\ \frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)$$

模，按Gram-Schmidt正交化过程便可得到 $\mathscr{P}_s$的一组标准正交基$\varphi_l^s(x)$，$0\leqslant|l|\leqslant s$。它与$x^\alpha(0\leqslant|\alpha|\leqslant s)$可以互相线性表示。记

$$b_l=\int_Q g(x)\varphi_l^s(x)\mathrm{d}x/|Q|.$$

显然，

$$P_Q(g)(x)=\sum_{0\leqslant|l|\leqslant s}b_l\varphi_l^s(x)$$

是次数不超过 s 的多项式，满足

$$\int_Q P_Q(g)(x)\varphi_l^s(x)\mathrm{d}x=\int_Q g(x)\varphi_l^s(x)\mathrm{d}x,\qquad 0\leqslant|l|\leqslant s,$$

即

$$\int_Q[P_Q(g)(x)-g(x)]\varphi_l^s(x)\mathrm{d}x=0,\qquad 0\leqslant|l|\leqslant s.$$

从而$P_Q(g)$满足(2.1)。

下面证明唯一性。设 g 与$P_Q(g)$如上，$\tilde{P}$是另一个次数不超过 s 且满足(2.1)的多项式。由

$$\int_Q[\tilde{P}(x)-P_Q(g)(x)]x^\alpha\mathrm{d}x=0,\qquad 0\leqslant|\alpha|\leqslant s$$

推出

$$\int_Q[\tilde{P}-P_Q(g)]^2\mathrm{d}x=0,$$

即$\tilde{P}=P_Q(g)$。

定义2.2　设 s 是非负整数，$0\leqslant[n\beta]\leqslant s$，$1\leqslant q'\leqslant\infty$，定义$L(\beta,q',s)$为全体$\boldsymbol{R}^n$上局部可积函数 g 组成的空间，其中 g 满足

$$\|g\|_{L(\beta,q',s)}\equiv\sup_{Q\subset R^n}|Q|^{-\beta}\left[\int_Q|g-P_Q(g)|^{q'}\frac{dx}{|Q|}\right]^{1/q'}<\infty,$$

这里$P_Q(g)$是由命题2.1确定的多项式。

显然，如果$f-g$是次数不超过 s 的多项式，那末

$$\|f\|_{L(\beta,q',s)}=\|g\|_{L(\beta,q',s)}.$$

反过来，如果$\|f\|_{L(\beta,q',s)}=0$，那末 f 是一次数不超过 s 的多项式。因此，在模去次数不超过 s 的多项式的意义下，$L(\beta,q',s)$构成一线性赋范空间。我们称它为Campanato-Meyers空间。关于这类空间，以后还要进行深入的讨论。

定义2.3 设$0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant\infty$，$p<q$，$s_0=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$。定义原子Hardy空间$H^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n)$是由$L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0\right)$具有以下性质的全体连续线性泛函 f 组成：$f=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_j$，其中$a_j$是$(p,q,s)$原子，$s\geqslant s_0$，$\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p<\infty$。这时，我们定义 f 的伪范数为

$$\|f\|_{H^{p,q,s}}=\inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{1/p}；\text{对所有分解 } f=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_j\right\}.$$

显然，当$q_1\leqslant q_2$时，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|^{q_1}dx\right)^{1/q_1}\leqslant\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|^{q_2}dx\right)^{1/q_2},$$

因此

$$H^{p,\infty,s}(\boldsymbol{R}^n)\subseteq H^{p,q_2,s}(\boldsymbol{R}^n)\subseteq H^{p,q_1,s}(\boldsymbol{R}^n).$$

同理，当$q_1'\leqslant q_2'$时，

$$L(\beta,\infty,s)\subseteq L(\beta,q'_2,s)\subseteq L(\beta,q'_1,s).$$

为使定义2.3有意义，我们必须说明，一个(p,q,s)原子a，必是$L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s\right)$的连续线性泛函。为此，定义

$$a(g)=\int_{R^n}g(x)a(x)\mathrm{d}x.$$

$a(g)$的线性是显然的。我们来看它的连续性。令$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，

$$\left|\int_{R^n}g(x)a(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_Q[g(x)-P_Q(g)(x)]a(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant|Q|\left(\int_Q|g(x)-P_Q(g)(x)|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)^{1/q'}$$

$$\times\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|a(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leqslant|Q|\,\|g\|_{L(\frac{1}{p}-1,\infty,s)}\,|Q|^{\frac{1}{p}-1}|Q|^{-\frac{1}{p}}$$

$$=\|g\|_{L(\frac{1}{p}-1,\infty,s)}.$$

若$f=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_ja_j$，$a_j$是$(p,q,s)$原子，$\sum|\lambda_j|^p<\infty$，则对任意$g\in L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s\right)$，由于$a_j(g)$一致有界，而

$$\sum|\lambda_j|\leqslant\left(\sum|\lambda_j|^p\right)^{1/p}<\infty,$$

故

$$f(g)=\lim_{j\to\infty}\sum_{i\leqslant j}\lambda_ia_i(g)$$

有定义，且是$L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s\right)$的连续线性泛函。

本节的主要结果是说，原子$H^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n)$不依赖于参数$q,s$的选取。

定理2.1 设 $0<p\leqslant 1\leqslant q<\infty$，$p<q$，$s\geqslant s_0=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$，则$H^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n)=H^{p,\infty,s_0}(\boldsymbol{R}^n)$，即这两个空间的元素相同，且范数等价。

证明 先说明H^{p,q,s_0}与q的选择无关。事实上，若$f\in H^{p,q,s_0}$，即$f=\sum\lambda_j a_j$，a_j是(p,q,s_0)原子，$\sum|\lambda_j|^p<\infty$。用定理1.1中(2)$\Longrightarrow$(1)的方法，可以证明$\|a_j\|_{H^p}\leqslant C$，其中C与原子的选取无关。容易看出，$\mathscr{S}\subset L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s\right)$。故

$$\|f\|_{H^p}\leqslant C\left(\sum|\lambda_j|^p\right)^{1/p},$$

从而$\|f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{H^{p,q,s_0}}$。反过来，若$f\in H^p$，则由定理1.1知$f\in H^{p,\infty,s_0}$，从而$f\in H^{p,q,s_0}$，并且$\|f\|_{H^{p,q,s_0}}\leqslant\|f\|_{H^{p,\infty,s_0}}\leqslant C\|f\|_{H^p}$。故$H^{p,q,s_0}=H^{p,\infty,s_0}=H^p$。

下面证明$H^{p,q,s}$与s无关。由于一个方向的包含关系是显然的，因此，只需证明，当$s_1>s_0$时，$H^{p,q,s_0}\subset H^{p,q,s_1}$。

先考虑$q=2$的情形。设a是一个$(p,2,s_0)$原子。不妨设它的支集是以原点为中心的单位立方体Q_0。我们要证明

$$a(x)=b_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k b_k(x), \tag{2.2}$$

其中b_0是$(p,2,s_1)$原子，支集为Q_0，$b_k(k\geqslant 1)$为(p,∞,s_1)原子，支集为中心在原点的方体Q_k，且$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^p\leqslant C(n,p,s_0,s_1)$而与原子$a$无关。

如果a的支集是一般的方体Q，那么通过平移可设Q的中心在原点。令$\tilde{a}(x)=\rho^{n/p}a(\rho x)$，其中$\rho$是正实数。选择适当的$\rho$，可使$\tilde{a}$的支集为单位方体$Q_0$。这时$\tilde{a}$仍然是一个$(p,2,s_0)$原子。消

失矩条件是显然的，故只需验证大小条件：

$$\left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|\tilde{a}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}=\left(\frac{\rho^{2n/p}}{|Q_0|}\int_{Q_0}|a(\rho x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\rho^{2n/p}\ \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|a(u)|^2\mathrm{d}u\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\rho^{n/p}|Q|^{-1/p}=|Q_0|^{-1/p}.$$

根据(2.2)，$\tilde{a}(x)=\tilde{b}_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\lambda}_k\tilde{b}_k(x)$，其中$\tilde{b}_0(x)$是支集为 Q_0 的$(p,2,s_1)$原子，$\tilde{b}_k(x)$是支集为Q_k的(p,∞,s_1)原子。回到 $a(x)$ 便得到

$$a(x)=\rho^{-\frac{n}{p}}\tilde{a}(\rho^{-1}x)$$

$$=\rho^{-\frac{n}{p}}\tilde{b}_0(\rho^{-1}x)+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\lambda}_k\rho^{-\frac{n}{p}}\tilde{b}_k(\rho^{-1}x).$$

不难看出$\rho^{-\frac{n}{p}}\tilde{b}_0(\rho^{-1}x)$是$(p,2,s_1)$原子，支于$\rho^{-1}Q_0$，$\rho^{-\frac{n}{p}}\tilde{b}_k(\rho^{-1}x)$是$(p,\infty,s_1)$原子，支于$\rho^{-1}Q_k$。

现在来证明(2.2)。实际上，Q_k可取为Q_0的伸展2^k倍：$Q_k=2^kQ_0$。记$\psi_l^k(0\leqslant|l|\leqslant s_1)$是$\{x^l\}(0\leqslant|l|\leqslant s_1)$在 Q_k 上相应于权 $|Q_k|^{-1}=2^{-nk}$的对偶基，即ψ_l^k由下面的方程确定：

$$\langle\psi_l^k,x^\alpha\rangle=\int_{Q_k}\psi_l^k(x)x^\alpha\frac{\mathrm{d}x}{|Q_k|}=\delta_{l\alpha},$$

$$0\leqslant|l|\leqslant s_1,\qquad 0\leqslant|\alpha|\leqslant s_1,$$

$$\psi_l^k(x)=0,\qquad 当x\notin Q_k.$$

ψ_l^k具有下面的性质：

(1) 若φ_l^k是$x^l\ (0\leqslant|l|\leqslant s_1)$在$Q_k$对权$|Q_k|^{-1}$按Gram-Schmidt正交化过程得到的正交基，且若

$$\varphi_l^k(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s_1}\beta_{l\nu}^k x^\nu,$$

则

$$\psi_l^k(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s_1}\beta_{\nu l}^k\varphi_l^k(x).$$

事实上，假设 $\psi_l^k(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s_1}\lambda_{l\nu}^k\varphi_l^k(x)$，便有

$$\lambda_{l\nu}^k=\langle\psi_l^k,\varphi_\nu^k\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant s_1}\beta_{\nu\alpha}^k\langle\psi_l^k,x^\alpha\rangle$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant s_1}\beta_{\nu\alpha}^k\delta_{l\alpha}=\beta_{\nu l}^k.$$

(2) $\psi_l^k(x)=2^{-k|l|}\psi_l^0(2^{-k}x)$.

这是由于

$$\int_{Q_k}\psi_l^k(x)x^\alpha\frac{\mathrm{d}x}{|Q_k|}=\int_{Q_0}2^{k|l|}\psi_l^k(2^ky)y^\alpha\mathrm{d}y,$$

即

$$\psi_l^0(y)=2^{k|l|}\psi_l^k(2^ky).$$

(3) $|\psi_l^k(x)|\leqslant C2^{-k|l|}$.

这是因为$|\psi_l^0(x)|\leqslant C$。

令 $m_l=\int_{Q_0}a(x)x^l\mathrm{d}x$。显然，当 $0\leqslant|l|\leqslant s_0$ 时，$m_l=0$。记

$P(x)=\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1}m_l\psi_l^0(x)$，则$b_0=a-P$是支在 Q_0上的函数，且对$0\leqslant|l|\leqslant s_1$，有

$$\int_{Q_0}b_0(x)x^l\mathrm{d}x=\int_{Q_0}a(x)x^l\mathrm{d}x-\int_{Q_0}P(x)x^l\mathrm{d}x$$

$$=m_l-\sum_{|\alpha|\leqslant s_1}m_\alpha\int_{Q_0}\psi_\alpha^0(x)x^l\mathrm{d}x$$

$$=m_l-m_l=0.$$

又由

$$\int_{Q_0}|b_0|^2\mathrm{d}x=\int_{Q_0}(a-P)^2\mathrm{d}x=\int_{Q_0}(a^2-2aP+P^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{Q_0}\Big(a^2-\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1}m_l^2\Big)\mathrm{d}x\leqslant\int_{Q_0}a^2\mathrm{d}x,$$

知b_0是$(p,2,s_1)$原子。下面我们证明，$P(x)$可由(p,∞,s_1)原子生成。对$k\geqslant 0$，记

$$m_l^k=\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}a(x)x^l\mathrm{d}x=\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_0}a(x)x^l\mathrm{d}x=2^{-nk}m_l。$$

显然

$$|m_l^k|\leqslant 2^{-kn}2^{-|l|}\int_{Q_0}|a(x)|\mathrm{d}x\leqslant C2^{-kn},$$

而

$$|m_l^k\psi_l^k(x)|\leqslant C2^{-kn\left(1+\frac{|l|}{n}\right)}。$$

这说明当$k\to\infty$时，$m_l^k\psi_l^k(x)\to 0$，因此

$$P(x)=\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1}m_l^0\psi_l^0(x)$$

$$=\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1}\sum_{k=1}^{\infty}(m_l^{k-1}\psi_l^{k-1}-m_l^k\psi_l^k)。$$

记$f_{lk}=m_l^{k-1}\psi_l^{k-1}-m_l^k\psi_l^k$。显然，$\operatorname{supp} f_{lk}\subset Q_k$，且

$$|f_{lk}(x)|\leqslant|m_l^{k-1}\psi_l^{k-1}(x)|+|m_l^k\psi_l^k(x)|$$

$$\leqslant C2^{-kn\left(1+\frac{|l|}{n}\right)}$$

$$=C2^{-kn\left(\frac{|l|}{n}+1-\frac{1}{p}\right)}|Q_k|^{-\frac{1}{p}}。$$

另外，当$0\leqslant|\alpha|\leqslant s_1$时，

$$\int_{Q_k}f_{lk}(x)x^\alpha\mathrm{d}x=\int_{Q_k}m_l^{k-1}\psi_l^{k-1}(x)x^\alpha\mathrm{d}x$$

$$-\int_{Q_k} m_l^k \psi_l^k(x) x^\alpha \mathrm{d}x$$

$$= 2^{-n(k-1)} m_l \int_{Q_{k-1}} \psi_l^{k-1}(x) x^\alpha \mathrm{d}x$$

$$-2^{-nk} m_l \int_{Q_k} \psi_l^k(x) x^\alpha \mathrm{d}x$$

$$= 2^{-nk}[2^n |Q_{k-1}| - |Q_k|]\delta_{l\alpha} m_l = 0.$$

取 $\lambda_{lk} = C2^{-nk(\frac{|l|}{n}+1-\frac{1}{p})}$，则 $f_{lk} = \lambda_{lk} b_{lk}$，其中 b_{lk} 是 (p,∞,s_1) 原子。由于 $s_0 < |l| \leqslant s_1$，而 $s_0 = \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$，因此 $\frac{|l|}{n} > \frac{1}{p} - 1$。

于是

$$\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{lk}^p \leqslant C_p \sum_{s_0<|l|\leqslant s_1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-nkp(\frac{|l|}{n}+1-\frac{1}{p})} \leqslant C.$$

这就证明了

$$a(x) = (a-p) + p = b_0 + \sum_{s_0<|l|\leqslant s_1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{lk} b_{lk},$$

它正是(2.2)所要求的。为了证明这的确是 $a(x)$ 的一个原子分解，还必须证明上述级数作用在 $L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0\right)$ 上是和 $a(x)$ 一样的连续线性泛函。为此，我们需要下面的引理。

引理2.1 设 $g \in L(\beta, q', s)$，$\varepsilon = \max\left(\beta, \frac{s}{n}\right)$，$b = \frac{1}{q'} + \varepsilon$，$q' \geqslant 1$，则 $g(x)(1+|x|)^{-nb} \in L^{q'}(\boldsymbol{R}^n)$。

这引理是下一章§6.1的推论1.2。证明将在下章给出。

回到定理2.1的证明。设 $g \in L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0\right)$。注意到 $L\left(\frac{1}{p}-1, \infty, s_0\right) \subseteq L\left(\frac{1}{p}-1, 2, s_0\right)$，根据引理2.1，

$g(x)(1+|x|)^{-n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\in L^2(R^n)$，只要 $\varepsilon>\frac{1}{p}-1\geqslant\frac{\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]}{n}$。

由于 b_{lk}是(p,∞,s_1)原子，知

$$\|b_{lk}\|_2\leqslant|Q_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\leqslant 2^{nk(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}.$$

另方面

$$\begin{aligned}&(1+|x|)^{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}|\lambda_{lk}b_{lk}(x)|\\&\leqslant C(1+2^k)^{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}2^{-nk(\frac{|l|}{n}+1-\frac{1}{p})}|b_{lk}(x)|\\&\leqslant C2^{nk(\frac{1}{2}+\varepsilon)}2^{-nk(\frac{|l|}{n}+1-\frac{1}{p})}|b_{lk}(x)|.\end{aligned}$$

因此

$$\|(1+|x|)^{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\lambda_{lk}b_{lk}(x)\|_2\leqslant C2^{-nk(\frac{|l|}{n}-\varepsilon)}.$$

由条件知$\frac{1}{p}-1<\frac{s_0+1}{n}\leqslant\frac{|l|}{n}\leqslant\frac{s_1}{n}$，故我们可选取$\varepsilon$，使得$\varepsilon>\max\left(\frac{1}{p}-1,\frac{s_0}{n}\right)$，$\frac{|l|}{n}>\varepsilon$，从而

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\|(1+|x|)^{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\lambda_{lk}b_{lk}(x)\|_2\\&\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-nk(\frac{|l|}{n}-\varepsilon)}\leqslant C.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{lk}b_{lk}(x)g(x)\\&=g(x)(1+|x|)^{-n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}(1+|x|)^{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\lambda_{lk}b_{lk}(x).\end{aligned}$$

这就证明了$a(x)$和级数 $b_0+\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{lk}b_{lk}(x)$ 作为$L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0\right)$的连续线性泛函是相同的。

为了结束定理2.1的证明，我们还必须考虑 $q\neq 2$ 的情形。这时证明可类似地进行，只需作一些明显的改动，如用Hölder不等式代替 Schwarz 不等式等。唯一需要指出的，是需要证明

$$\left(\int_{Q_0}|a-p|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_{Q_0}|a|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

这是不难得到的，因为

$$\left(\int_{Q_0}|a-P|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant\left(\int_{Q_0}|a|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}+\sup_{x\in Q_0}|P(x)|,$$

而

$$|P(x)|=\left|\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1}m_l\psi_l^0(x)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s_0<|l|\leqslant s_1}\left|\int_{Q_0}a(x)x^l\mathrm{d}x\cdot\psi_l^0(x)\right|$$

$$\leqslant C\int_{Q_0}|a(x)|\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int_{Q_0}|a|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

至此，定理 2.1 证完。

到现在为止，我们证明了，当 $0<p\leqslant 1$ 时，

$$H^p(\boldsymbol{R}^n)=H^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n),$$

只要 $p<q$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，$s\geqslant s_0=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$。这结果将带来很大的方便。事实上，当我们要证明一个广义函数属于H^p时，我们只要选择一组特殊的满足条件的 q,s，证明 $f\in H^{p,q,s}$ 即可。而当我们已知 $f\in H^p$ 时，我们却可以根据需要任意选择满足条件的 q,s，由 $f\in H^{p,q,s}$ 便利地推导出 f 所具有的性质，

§5.3 注释与进一步的结果

注释

一维欧氏空间上H^p的原子刻画是R.Coifman于1974年首先发现并加以证明的[Co1]，接着1978年R.Latter[L]把此结果推广到$\boldsymbol{R}^n$。他们的证明都是通过H^p空间的大极大函数(grand maximal function)刻画。1977年，A.P.Calderón利用他发现并以他的名字命名的"Calderón表示定理"，通过S函数刻画得到H^p空间的原子分解[C5]，这不仅简化了$H^p(\boldsymbol{R}^n)$原子分解定理的证明，而且推动了对其他空间(如本书第九章将叙述的BMO、Besov空间、Triebel-Lizorkin空间)的"原子"刻画的研究。定理1.1中的(1)$\Longrightarrow$(3)(即$(p,2)$原子分解)的证明，是J.Wilson于1982年给出的(见[Wi])。他直接用非切向极大函数刻画得到了H^p空间的原子分解，回答了G.Weiss提出的一个问题[We2].定理1.1中的(3)$\Longrightarrow$(2)(即$(p,2)$原子可分解为(p,∞)原子的和)的证明，取材于[GR].Bennett与Sharpley在一维的情形，利用解析函数的性质，直接通过径向极大函数，得到了H^p空间的原子分解(见[BeS1])，但他们的方法明显地依赖于解析函数，至今未能推广到高维。定理1.2与1.3证明的思想来自A.P.Calderón[C5]，本书取材于韩永生的文章(见[H3]，[H5])。

考虑一般的(p,q)原子分解，最早见于Coifman-Weiss与Latter的文章[CW2]，[L]，把$H^{p,q,s}$看成Campanato-Meyers空间线性泛函的思想以及定理2.1，属于Taibleson-Weiss[TW1]。关于Campanato-Meyers空间，在下面两章还有更多的讨论。

进一步的结果

1. 原子Hardy空间$H^{p,q,s}$范数定义中的下确界，必须取遍

一切 $f=\sum_j \lambda_j a_j$ 的无限和。如果把下确界改为仅对一切有限和取，则所得到的范数是同 H^p 范数不等价的。Y.Meyer举出反例，说明存在函数，其 H^p 范数可任意小，但按有限和取的范数却永远 $\geqslant 1$，见[MTW]。

2. 抛物 H^p 空间的原子分解。设 $0<p\leqslant 1$。称 a 为抛物 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 的 k 原子，如果

$$\operatorname{supp} a \subset B,\ \|a\|_\infty \leqslant |B|^{-1/p},$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} x^\alpha a(x)\mathrm{d}x=0,\quad \text{当} 0\leqslant|\alpha|\leqslant k,$$

其中 $k\geqslant \frac{\gamma}{p}-1$，$\gamma$ 是矩阵 P 的迹（参见 §4.4 中的 3）。A.P. Calderón 的结果是：若 P 在复数域中是可对角化的，则对于抛物 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 中的任意 f 与整数 k，$k\geqslant \frac{\gamma}{p}-1$，存在 k 原子 a_j，使得 $f=\sum\lambda_j a_j$ 在 H^p 意义下成立，且

$$C^{-1}\|f\|_{H^p}^p\leqslant\sum\|\lambda_j a_j\|_{H^p}^p\leqslant C\|f\|_{H^p}^p$$

成立，其中 C 只依赖于 k 及维数 n。见[C5]。

3. 在 Coifman-Weiss 齐型空间 (X,d,μ) 中（见 §4.4 中的 4），定义球为

$$B(x,r)=\{y|\in X,\ d(y,x)<r\}.$$

设 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p<q$，我们称 $a(x)$ 为 (p,q) 原子，如果

(i) $\operatorname{supp} a\subset B$，$B$ 是 X 的某个球体；

(ii) $\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|a(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{1/q}\leqslant\mu(B)^{-1/p}$；

(iii) $\int_X a(y)\mathrm{d}\mu(y)=0$。

对 $0<p<1$，记 $\alpha=\frac{1}{p}-1$，定义

$$H^{p,q}(X)=\{f \mid \in (\mathrm{Lip}\alpha)',\ f=\sum \lambda_j a_j,$$
$$a_j 为(p,q)原子,\ \sum|\lambda_j|^p<\infty\},$$

而对$p=1$，则定义

$$H^{1,q}(X)=\{f \mid \in L^1(X), f=\sum \lambda_j a_j,$$
$$a_j 为(1,q)原子,\ \sum|\lambda_j|<\infty\}.$$

其范数可类似于$H^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n)$定义。Coifman-Weiss证明了，$H^{p,q}=H^{p,\infty}$，并且得到了他们的对偶空间[CW2]。当然，上述定义只有当p接近于1时才有意义。因为例如在$\boldsymbol{R}^1$的情形，当$\alpha>1$时，Lip α只包含常数函数。另外，当$\mu(X)<\infty$时，常数函数$\mu(X)^{-1/p}$也应算作原子。Macias与Segovia证明了，当p接近于1时，$H^{p,q}(X)$与§4.4的4中定义的$H^p(X)$是相同的。参见[MS1],[MS2]。

由于在齐型空间的原子定义中，无法定义高阶消失矩，如何对一切$0<p<1$定义原子Hardy空间，仍然是一个未解决的问题。

4. 1985年韩永生应用一般的S函数，引入了一类Hardy型空间，相应的原子只是把大小条件加以改变。设$0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant 2$，$p<q$，$s$是不小于$n\left(\frac{1}{p}-1\right)$的整数。我们称$L^q$函数$a$是一个特殊的$(p,q,s)$原子，如果

(i) supp $a\subset Q$，Q是$\boldsymbol{R}^n$的方体；

(ii) $\|a\|_{B^q}=\left(\iint_{\boldsymbol{R}^{n+1}_+}|a*\psi_t(y)|^q\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}\leqslant|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$；

(iii) $\int_{\boldsymbol{R}^n}x^\alpha a(x)\mathrm{d}x=0$，　当$0\leqslant|\alpha|\leqslant s$，

其中$\psi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$且当$\xi\neq 0$时$\int_0^\infty|\hat{\psi}(\xi t)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}=1$。相应的Hardy型空间定义为

$$H_0^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n)=\{f \mid \in\mathscr{S}',\ f=\sum\lambda_j a_j,$$
$$a_j 为特殊(p,q,s)原子,\ \sum|\lambda_j|^p<\infty\}.$$

显然，当 $q=2$ 时，$B^2=L^2$，这时特殊的 $(p,2,s)$ 原子就是本章所介绍的 $(p,2,s)$ 原子。因此 $H_0^{p,2,s}=H^{p,2,s}=H^p$。但对于 $1\leqslant q<2$，有 $B^q\subsetneqq L^q$，因此 $H_0^{p,q,s}\subsetneqq H^{p,q,s}=H^p$，即 $H_0^{p,q,s}$ 是 H^p 的一个子空间。韩永生证明了 $H_0^{p,q,s}$ 有广义 S 函数刻画如下：

$$H_0^{p,q,s}=\{f\in\mathscr{S}':\ S_q(f)\in L^p\},$$

其中

$$S_q(f)(x)=\left\{\iint_{\Gamma(x)}|f*\psi_t(y)|^q\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right\}^{1/q}.$$

参看[H3],[H5]。

5．定理2.1表明，在 (p,q,s) 原子的条件中，增加消失矩的阶数 $s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$，并不带来任何新的东西。自然会问，减少消失矩的条件又如何？Taibleson-Weiss 在 $p=1$ 的情形考虑了这一类问题。设定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的函数 $a(x)$ 满足：

(i) $\operatorname{supp}a\subset I$；

(ii) $\|a\|_q\leqslant|I|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$，

其中 $1<q\leqslant\infty$，则称 $a(x)$ 为"q 块"(q-block)。由"q 块"生成的空间：

$$B_q=\left\{f\,|\,f=\sum\lambda_ja_j,a_j\text{为 }q\text{ 块},\sum|\lambda_j|\left(1+\log^+\frac{1}{|\lambda_j|}\right)<\infty\right\}$$

称为块空间(block space)。记

$$\|f\|_{B_q}=\inf_{f=\sum\lambda_ja_j}\left\{\sum|\lambda_j|\left(1+\log^+\frac{1}{|\lambda_j|}\right)\right\},$$

它构成 B_q 的伪模。这个空间与 Fourier 级数几乎处处收敛有密切的关系．当考虑周期函数时，一个重要的结论是：若 $f\in B_q$，则 f 的 Fourier 级数几乎处处收敛于 f。可以把 B_q 的定义推广到 $\boldsymbol{R}^n$。多元周期函数的"块空间"与 Fourier级数的Riesz-Bochner球形和有密切的关系。有关内容可参看[TW2],[LTW],[MTW],[So],[L1],[Lu1],[Lu4]等。

6. 在§4.4的7中，我们介绍了，存在 $H^1_\varphi \neq \{0\}$ 且 $H^1_\varphi \neq H^1$。一个自然的问题是，H^1_φ 是否有相应的原子分解？这个问题与Weiss在[We2]中提的问题密切相关，即似乎在原子分解与刻画 H^p 空间的卷积核（不论是用极大函数还是用 S 函数）之间存在某种关系。

第六章　H^p空间的分子刻画

H^p 空间的原子刻画，不仅便于把它推广到欧氏空间以外的许多情形，而且将简化算子在其上的有界性研究。例如，要研究某线性算子是H^p到 L^p 有界的，只要验证算子作用在原子上，其像的 L^p 模被一与原子选取无关的常数控制便够了。但要研究算子在 H^p 本身的有界性，却要稍为复杂一些，原因是原子经算子作用后，其像不一定是原子了，因为一般说来，支集条件不再满足。本章引入的分子概念是原子概念的推广，它保留了消失矩条件，但不一定是紧支集的。对许多算子来说，原子的像便是分子。本章的主要目的是在分子概念的基础上，证明 H^p 函数的分子分解定理，并用它研究算子在H^p空间的有界性，同时给出 H^p 的乘子定理。

§6.1　H^p空间的分子分解

为了理解如何定义分子，我们先看一个特例：$n=1$，$p=1$。由于Hilbert变换把$H^1(\boldsymbol{R})$有界地变到 $H^1(\boldsymbol{R})$，自然想到，如何描述原子在Hilbert变换下的像的特征？

设 a 是一$(1,\infty)$原子，支于以原点为中心的区间 I 上。H是Hilbert变换。这时

$$\|H(a)\|_2\leqslant C\|a\|_2\leqslant C|I|^{-1/2}. \tag{1.1}$$

并且当$|x|>|I|$时，

$$|H(a)(x)|=\left|\int_{\boldsymbol{R}}\frac{a(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right|=\left|\int_I\left[\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x}\right]a(y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \frac{C}{|x|^2}\int_I |ya(y)|\,dy \leqslant C\frac{|I|}{|x|^2},$$

因此

$$\int_{|x|>|I|} |x|^2 |H(a)(x)|^2 dx \leqslant C|I|,$$

而

$$\int_{|x|<|I|} |x|^2 |H(a)(x)|^2 dx \leqslant |I|^2 C|I|^{-1} \leqslant C|I|,$$

故

$$\int_R |x|^2 |H(a)(x)|^2 dx \leqslant C|I|.$$

综合(1.1)便得

$$\int_R |H(a)(x)|^2 dx \int_R |x|^2 |H(a)(x)|^2 dx \leqslant C. \qquad (1.2)$$

从下面的引理可以看出，对$H(a)(x)$的这一特征刻画已经很有用了。

引理1.1　若定义在R上的函数$f(x)$满足$f\in L^2(\boldsymbol{R})$，$xf(x)\in L^2$，则$f\in L^1(\boldsymbol{R})$，并且

$$\left(\int_R |f(x)|\,dx\right)^2 \leqslant 8\left(\int_R |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_R |x|^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{|x|\leqslant C} |f(x)|\,dx + \int_{|x|\geqslant C} |f(x)|\,dx$$

$$\leqslant (2C)^{\frac{1}{2}}\left(\int_R |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$+\left(\int_R |x|^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{|x|\geqslant C}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^2}\right)^{1/2}$$

$$=2^{1/2}(C^{1/2}\|f\|_2+C^{-1/2}\|xf\|_2),$$

取 $C=\|f\|_2^{-1}\|xf\|_2$ 便得所要求的结果。

引理1.2 设 f 满足上一引理的条件，$\int_R f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f\in H^1(\boldsymbol{R})$，且

$$\|f\|_{H^1(R)}\leqslant C\|f\|_2\|xf(x)\|_2.$$

证明 由§3.2中定理2.4知，只需证明 $H(f)\in L^1$。根据假设 $f\in L^2$，知 $H(f)\in L^2$，而

$$xH(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x-y}f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x}\right)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{x-y}f(y)\mathrm{d}y=H(yf)(x).$$

故 $xH(f)\in L^2$。从上一引理便推得所要求的结果。证毕。

综上所述，我们可以把 $H^1(\boldsymbol{R})$ 的分子（中心在 x_0）定义为具有下述性质的函数 $M(x)$：

(i) $\left(\int_R |M(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/4}\left(\int_R |x-x_0|^2|M(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/4}<\infty$,

(ii) $\int_R M(x)\mathrm{d}x=0$,

其中(i)中左边的数称为分子 M 的范数，记为 $\mathscr{N}(M)$．由引理1.2知分子 $M\in H^1$，而显然 $H^1(\boldsymbol{R})$ 的(1,2,0)原子是分子。这样我们便

得到，$f\in H^1(\boldsymbol{R})$当且仅当$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}M_j(x)$对几乎所有的$x$成立，其中$M_j$是$H^1$分子，且$\sum_{j=1}^{\infty}\mathscr{N}(M_j)<\infty$。另外，上面我们还证明了，Hilbert 变换把$H^1(\boldsymbol{R})$的原子映成分子。

下面要把上述概念与结果推广到一般的p与n的情形。它要比$p=n=1$的情形复杂得多。

定义1.1 设$0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p<q$，$s\geqslant s_0=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$，$\varepsilon>\max\left\{\frac{s}{n},\frac{1}{p}-1\right\}$。记$a=1-\frac{1}{p}+\varepsilon$，$b=1-\frac{1}{q}+\varepsilon$。我们称$L^q(\boldsymbol{R}^n)$的函数$M$为一个中心在$x_0$的$(p,q,s,\varepsilon)$分子，如果$|x|^{nb}M(x)\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$，且

(i) $\|M\|_q^{\frac{a}{b}}\||\cdot-x_0|^{nb}M(\cdot)\|_q^{1-\frac{a}{b}}<\infty$,

(ii) $\int_{\boldsymbol{R}^n}M(x)x^\alpha\mathrm{d}x=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant s$。

通常，(i)称为分子的大小条件，(ii)称为分子的消失矩条件。我们还称(i)中左边的数为分子M的范数，记为$\mathscr{N}(M)$。

注意，前面说的$H^1(\boldsymbol{R})$分子，实际上是$\left(1,2,0,\frac{1}{2}\right)$分子。另外，$p<q$，$\varepsilon>\frac{1}{p}-1$保证了$a>0$，$0<\frac{a}{b}<1$，而$\varepsilon$实际上是刻画$M(x)$在无穷远附近消失的阶的一个指标。容易证明，如果$M(x)$是$(p,q,s,\varepsilon)$分子，$\varepsilon_1<\varepsilon,\varepsilon_1>\max\left\{\frac{s}{n},\frac{1}{p}-1\right\}$，那么$M(x)$也是$(p,q,s,\varepsilon_1)$分子。

引理1.3 设M是可测函数，且满足

$$|M(x)|\leqslant C\frac{\rho^\beta}{(\rho+|x|)^{n/p_1+\beta}},\tag{1.3}$$

其中$\rho>0$，$\beta>0$，$0<p_1\leqslant 1$，则对$\frac{\beta}{n}+\left(\frac{1}{p_1}-1\right)\geqslant\varepsilon>\frac{1}{p_1}-1$，

$a=1-\frac{1}{p_1}+\varepsilon$，$b=1+\varepsilon$，有

$$\|M\|_{\infty}^{\frac{a}{b}}\| \cdot |^{nb}M(\cdot)\|_{\infty}^{1-\frac{a}{b}}\leqslant C; \tag{1.4}$$

反过来，若对$0<a<b$，(1.4)成立，则(1.3)成立，其中

$$\beta=na, \quad p_1=\frac{1}{b-a}.$$

证明 设(1.3)成立。这时$\|M\|_\infty\leqslant C\rho^{-\frac{n}{p_1}}=C\rho^{n(a-b)}$。而

$$||x|^{nb}M(x)|\leqslant C\left(\frac{|x|}{\rho+|x|}\right)^{nb}\frac{\rho^{\beta}}{(\rho+|x|)^{n/p_1+\beta-nb}}$$

$$\leqslant C\rho^{nb-\frac{n}{p_1}}=C\rho^{na}.$$

因此

$$\|M\|_{\infty}^{\frac{a}{b}}\| \cdot |^{nb}M(\cdot)\|_{\infty}^{1-\frac{a}{b}}\leqslant C\rho^{\frac{a}{b}n(a-b)}\rho^{na(1-\frac{a}{b})}=C.$$

反过来，设(1.4)成立。令$\rho^{-\frac{n}{p_1}}=\frac{1}{C}\|M\|_\infty$。这时

$$|x|^{nb}M(x)\leqslant C^{\frac{b}{b-a}}\|M\|_{\infty}^{-\frac{a}{b}\frac{b}{b-a}}=C\rho^{\frac{n}{p_1}\frac{a}{b-a}}=C\rho^{na}.$$

因此

$$M(x)\leqslant\min\left\{C\rho^{-\frac{n}{p_1}},\frac{C\rho^{na}}{|x|^{nb}}\right\}$$

$$=C\rho^{na}\min\{\rho^{-\frac{n}{p_1}-na},\ |x|^{-\frac{n}{p_1}-na}\}$$

$$\leqslant C\rho^{na}\left[\frac{1}{\rho+|x|}\right]^{\frac{n}{p_1}+na}=\frac{C\rho^{\beta}}{(\rho+|x|)^{n/p_1+\beta}}.$$

引理1.4 若a是一个(p,q,s)原子，则a是一个(p,q,s,ε)分子，其中$\varepsilon>0$，且a的分子范数满足

$$\mathscr{N}(a)\leqslant C_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

其中C_n是仅依赖于维数n的常数。

证明 设 a 是(p,q,s)原子，支于以 x_0 为中心的方体Q。只需验证 a 满足分子的大小条件。事实上

$$\|a\|_q \leqslant |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} = |Q|^{a-b},$$

而

$$\||\cdot - x_0|^{nb} a(\cdot)\|_q \leqslant (\sqrt{n}\rho)^{nb}\|a\|_q,$$

其中 ρ 是方体Q边长的一半。因此

$$\||\cdot - x_0|^{nb} a(\cdot)\|_q \leqslant \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^{nb} |Q|^b |Q|^{a-b}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^{nb} |Q|^a.$$

于是

$$\mathscr{N}(a) \leqslant |Q|^{\frac{a}{b}(a-b)} \|Q\|^{a\left(1-\frac{a}{b}\right)} \left[\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^{n}\right]^{b\left(1-\frac{b}{a}\right)} = C_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

为了证明每一个(p,q,s,ε)分子都属于 $H^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n)$，我们需要更多关于 Campanato-Meyers 空间 $L(\beta,q',s)$ 的性质，其中 $\beta = \frac{1}{p} - 1$。

考虑以原点为中心的方体Q。设$\{\varphi_l^s\}(0 \leqslant |l| \leqslant s)$是$\{x^\alpha\}(0 \leqslant |l| \leqslant s)$ 在Q上相对于权$\frac{dx}{|Q|}$经 Gram-Schmidt 正交化得到的标准正交基。记 $\mathscr{P}_Q^s$ 是限制在Q上的全体次数不超过 s 的多项式集合。在§5.2的命题2.1中引入过多项式

$$P_Q(g) = \sum_{|\nu| \leqslant s} \langle g, \varphi_\nu^s \rangle \varphi_\nu^s = \sum_{|\nu| \leqslant s} \int_Q g(x)\varphi_\nu^s(x) \frac{dx}{|Q|} \varphi_\nu^s.$$

记 Ω_n 为以原点为中心的单位立方体。设$\rho Q = \Omega_n$，并记 $\varphi_\nu^s = \varphi_{\nu\rho}^s$。显然 $\varphi_{\nu\rho}^s(x) = \varphi_{\nu 1}^s(\rho^{-1}x)$。令

$$\sum_{|l| \leqslant s} \|\varphi_{l1}^s\|_\infty = C,$$

则对任意 $x \in Q$，有

$$|P_Q(g)(x)|\leqslant\frac{C}{|Q|}\int_Q|g(x)|\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

其中C与g,Q无关。显然，此不等式对中心不在原点的方体Q也成立。

对任意$Q\subset\boldsymbol{R}^n$，$p\in\mathscr{P}_s^Q$，注意到$P_Q(p)=p$，便知

$$p-P_Q(g)=P_Q(p)-P_Q(g)=P_Q(p-g).$$

应用(1.5)，有

$$\begin{aligned}&\left(\int_Q|g-P_Q(g)|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)^{1/q'}\\&\leqslant\left(\int_Q|g-p|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)^{1/q'}+\left(\int_Q|p-P_Q(g)|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)^{1/q'}\\&\leqslant\left(\int_Q|g-p|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)^{1/q'}+\left(\int_Q|P_Q(p-g)|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)^{1/q'}\\&\leqslant(1+C)\left(\int_Q|g-p|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right)^{1/q'}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|g-P_Q(g)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\\&\leqslant A\inf_{p\in\mathscr{P}_s^Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|g-p|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

定义1.2 设g是$\boldsymbol{R}^n$上局部可积函数，我们称$g\in L^*(\beta,q',s)$，其中$\beta>0$，$1\leqslant q'\leqslant\infty$，$s$是非负整数，如果

$$\|g\|_{L^*(\beta,q',s)}=\sup_{Q\subset R^n}\left(|Q|^{-\beta}\left\{\inf_{p\in\mathscr{P}_s^Q}\int_Q|g-p|^{q'}\frac{\mathrm{d}x}{|Q|}\right\}^{1/q'}\right)<\infty.$$

引理1.5 对$\beta>0$，$1\leqslant q'\leqslant\infty$，$s$非负整数，$L(\beta,q',s)$与$L^*(\beta,q',s)$是同一空间，即它们的范数是等价的：

$$\|\cdot\|_{L(\beta,q',s)}\sim\|\cdot\|_{L^*(\beta,q',s)}.$$

证明 不等式(1.6)给出了等价性中一个方向的控制，而另一个方向的控制是显然的。证毕。

定理1.1 设 β, q', s 如前，$\varepsilon>\max\left\{\frac{s}{n}, \beta\right\}$，则下述两个条件等价：

(i) $\|g\|_{L^*(\beta,q',s)}<\infty$;

(ii)

$$\|g\|_{L^{**}(\beta,q',s)} = \sup_{\rho>0,\, x_0\in R^n} \rho^{-\beta n} \times\left\{\inf_{p\in\mathscr{P}_s^Q}\int_{R^n}\left(\frac{\rho^{\varepsilon n}}{(\rho+|x-x_0|)^{n/q'+\varepsilon n}}|g(x)-p(x)|\right)^{q'}dx\right\}^{\frac{1}{q'}} <\infty,$$

并且

$$\|g\|_{L^*(\beta,q',s)} \sim \|g\|_{L^{**}(\beta,q',s)}.$$

证明 (ii)$\Longrightarrow$(i)。 对任意方体 Q，其中心为 x_0，边长为 2ρ，则

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^{**}(\beta,q',s)} &\geqslant \inf_{p\in\mathscr{P}_s^Q}\left(\int_{R^n}\frac{\rho^{\varepsilon n q'-n\beta q'}}{(\rho+|x-x_0|)^{n+\varepsilon n q'}}|g-p|^{q'}dx\right)^{1/q'}\\
&\geqslant \inf_{p\in\mathscr{P}_s^Q}\left(\int_Q\frac{\rho^{\varepsilon n q'-n\beta q'}}{(\rho+|x-x_0|)^{n+\varepsilon n q'}}|g-p|^{q'}dx\right)^{1/q'}\\
&\geqslant \inf_{p\in\mathscr{P}_s^Q} C\left(\int_Q\rho^{-n\beta q'-n}|g-p|^{q'}dx\right)^{1/q'}\\
&= C\|g\|_{L^*(\beta,q',s)}.
\end{aligned}$$

(i)$\Longrightarrow$(ii)。 对任意 $x_0, \rho>0$，取 Q 为以 x_0 为中心，边长为 2ρ 的方体。这时，把 $P_Q(g)$ 写成

$$P_Q(g)(x)=\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{a_\nu(x_0,\rho)}{\nu!}(x-x_0)^\nu,$$

其中 $\nu! = \nu_1! \cdots \nu_n!$,

$$a_\nu(x_0, \rho) = D^\nu(P_Q(g))(x_0), \qquad D^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}.$$

我们要证明的是

$$\rho^{-\beta n}\left\{\int_{R^n}\left(\frac{\rho^{\varepsilon n}}{(\rho + |x - x_0|)^{n/q' + \varepsilon n}} |g(x) - P_Q(g)(x)|\right)^{q'} dx\right\}^{1/q'}$$
$$\leqslant C\|g\|_{L(\beta, q', s)},$$

其中 C 与 g, ρ, x_0 无关。

令 $Q_0 = Q$，$Q_m = 2^m Q_0$，则

$$P_{Q_m}(g)(x) = \sum_{|\nu| \leqslant s} \frac{a_\nu(x_0, 2^m \rho)}{\nu!}(x - x_0)^\nu.$$

这样

$$\rho^{-\beta n}\left\{\int_{R^n}\left(\frac{\rho^{\varepsilon n}}{(\rho + |x - x_0|)^{n/q' + \varepsilon n}} |g(x) - P_Q(g)(x)|\right)^{q'} dx\right\}^{1/q'}$$

$$\leqslant \rho^{-\beta n}\left[\left(\rho^{-n} \int_{Q_0} |g - P_{Q_0}(g)|^{q'} dx\right)^{1/q'}\right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\int_{Q_m \setminus Q_{m-1}} \left(\frac{\rho^{\varepsilon n} |g - P_{Q_0}(g)|}{(\rho + |x - x_0|)^{n/q' + \varepsilon n}}\right)^{q'} dx\right\}^{1/q'}\right]$$

$$\leqslant \rho^{-\beta n}\left[\left(\rho^{-n} \int_{Q_0} |g - P_{Q_0}(g)|^{q'} dx\right)^{1/q'}\right.$$
$$\left. + \rho^{n\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{(2^{m-1}\rho)^{-n - n\varepsilon q'} \int_{Q_m} |g - P_{Q_0}|^{q'} dx\right\}^{1/q'}\right]$$

$$\leqslant C\rho^{-\beta n} \sum_{m=0}^{\infty} (2^{-n\varepsilon})^m \left(\frac{1}{|Q_m|}\int_{Q_m} |g - P_{Q_0}(g)|^{q'} dx\right)^{1/q'}$$

$$\leqslant C\rho^{-\beta n}\sum_{m=0}^{\infty}(2^{-n\varepsilon})^m\left(\frac{1}{|Q_m|}\int_{Q_m}|g-P_{Q_m}(g)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}$$

$$+C\rho^{-\beta n}\sum_{m=0}^{\infty}(2^{-n\varepsilon})^m\left(\frac{1}{|Q_m|}\int_{Q_m}|P_{Q_m}(g)$$

$$-P_{Q_0}(g)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}=\text{I}+\text{II}.$$

显然

$$\text{I}\leqslant C\rho^{-\beta n}\sum_{m=0}^{\infty}|Q_m|^{\beta}(2^{-\varepsilon n})^m\|g\|_{L(\beta,q',s)}$$

$$\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty}(2^{-(\varepsilon-\beta n)})^m\|g\|_{L(\beta,q',s)}$$

$$\leqslant C\|g\|_{L(\beta,q',s)}.$$

而

$$\text{II}\leqslant C\rho^{-\beta n}\sum_{m=0}^{\infty}(2^{-\varepsilon n})^m\sup_{x\in Q_m}|P_{Q_m}(g)(x)-P_{Q_0}(g)(x)|,$$

其中

$$\sup_{x\in Q_m}|P_{Q_m}(g)(x)-P_{Q_0}(g)(x)|$$

$$\leqslant\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}|a_\nu(x_0,2^m\rho)-a_\nu(x_0,\rho)|$$

$$\leqslant\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}|a_\nu(x_0,2^{j+1}\rho)-a_\nu(x_0,2^j\rho)|.$$

我们断言，对任意次数为 s 的多项式 p，$|\nu|\leqslant s$，有

$$|D^\nu(p)(x_0)|\leqslant C\rho^{-|\nu|}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|p(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'},\qquad(1.7)$$

其中 C 仅依赖于 n,q',s，与 p,Q,ν 无关。

假设断言(1.7)成立，则

$$\sup_{x\in Q_m}|P_{Q_m}(g)(x)-P_{Q_0}(g)(x)|$$

$$\leqslant C\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}(2^j\rho)^{-|\nu|}\Big(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|P_{Q_{j+1}}(g)$$

$$-P_{Q_j}(g)|^{q'}\,dx\Big)^{1/q'}$$

$$\leqslant C\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}(2^j\rho)^{-|\nu|}$$

$$\times\Big\{\Big(\int_{Q_j}|P_{Q_{j+1}}(g)-g|^{q'}\frac{dx}{|Q_j|}\Big)^{1/q'}$$

$$+\Big(\int_{Q_j}|P_{Q_j}(g)-g|^{q'}\frac{dx}{|Q_j|}\Big)^{1/q'}\Big\}$$

$$\leqslant C\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{(2^m\rho)^{|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}(2^j\rho)^{-|\nu|}(|Q_{j+1}|^{\beta}+|Q_j|^{\beta})$$

$$\times\|g\|_{L(\beta,q',s)}$$

$$\leqslant C\rho^{n\beta}\|g\|_{L(\beta,q',s)}\sum_{|\nu|\leqslant s}\frac{2^{m|\nu|}}{\nu!}\sum_{j=0}^{m-1}(2^{\beta n-|\nu|})^j$$

$$\leqslant C\rho^{n\beta}\|g\|_{L(\beta,q',s)}\sum_{j=0}^{m-1}2^{n[(m-j)\frac{s}{n}+\beta j]}.$$

若$\frac{s}{n}\geqslant\beta$，则

$$\sum_{j=0}^{m-1}2^{n[(m-j)\frac{s}{n}+\beta j]}\leqslant\sum_{j=0}^{m-1}2^{ms}=m2^{ms},$$

从而

$$\text{II}\leqslant C\rho^{-n\beta}\sum_{m=0}^{\infty}(2^{-\varepsilon n})^m\rho^{n\beta}m2^{ms}\|g\|_{L(\beta,q',s)}$$

$$\leqslant C\|g\|_{L(\beta,q',s)}\sum_{m=0}^{\infty}m2^{-m(n\varepsilon-s)}<\infty.$$

若 $\beta>\frac{s}{n}$，则

$$\sum_{j=0}^{m-1} 2^{n\left[(m-j)\frac{s}{n}+\beta j\right]} \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} 2^{nm\beta} = m2^{nm\beta},$$

从而

$$\text{II} \leqslant C\|g\|_{L(\beta,q',s)} \sum_{m=0}^{\infty} m2^{-n(s-\beta)m} < \infty.$$

现在回头证明断言(1.7)。先设 Ω_n为中心在原点，边长为 2 的立方体，$\gamma(x)$是次数不超过 s 的多项式，

$$\gamma(x) = \sum_{|\nu|\leqslant s} \frac{b_\nu}{\nu!} x^\nu,$$

其中 $b_\nu = \mathrm{D}^\nu(\gamma)(0)$。 考虑 $\mathscr{P}_s^{\Omega_n}$上两个不同范数：

$$\|\gamma\|_\infty = \sup_{|\nu|\leqslant s} |b_\nu|,$$

$$\|\gamma\|_{q'} = \left(\frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n} |\gamma(x)|^{q'} \mathrm{d}x\right)^{1/q'}.$$

由于有限维 Banach 空间的任意两个范数是等价的，即$\|\gamma\|_\infty \sim \|\gamma\|_{q'}$，特别地有

$$|b_\nu| = |\mathrm{D}^\nu(\gamma)(0)| \leqslant C\|\gamma\|_{q'}.$$

对一般的 $p(x) \in \mathscr{P}_s^Q$，其中 Q 是以 x_0为中心，2ρ为边长的方体。设

$$p(x) = \sum_{|\nu|\leqslant s} \frac{C_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu,$$

其中 $C_\nu = \mathrm{D}^\nu(p)(x_0)$。令

$$\gamma(\omega) = p(\rho\omega + x_0) = \sum_{|\nu|\leqslant s} \frac{C_\nu}{\nu!} \rho^{|\nu|}\omega^\nu.$$

显然 $\gamma(\omega) \in \mathscr{P}_s^{\Omega_n}$。因此

$$|D^{\nu}(\gamma)(0)| = \rho^{|\nu|}|C_{\nu}| = \rho^{|\nu|}|D^{\nu}(p)(x_0)|$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n}|\gamma(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|p(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'},$$

这正是断言(1.7)所要求的。

推论1.1 若 $g\in L(\beta,q',s)$，则存在多项式 $p(x)\in\mathscr{P}^s$，使得

$$|g(x)-p(x)|(1+|x|)^{-nb}\in L^{q'}(\boldsymbol{R}^n),$$

其中 $nb=n\left(\frac{1}{q'}+\varepsilon\right)$，$\varepsilon>\max\left\{\frac{s}{n},\beta\right\}$。

这是定理1.1的结论包含了的。

推论1.2 若 $g\in L(\beta,q',s)$，$\varepsilon>\max\left\{\frac{s}{n},\beta\right\}$，则

$$g(x)(1+|x|)^{-nb}\in L^{q'}(\boldsymbol{R}^n),$$

其中 $nb=n\left(\frac{1}{q'}+\varepsilon\right)$。

这是因为，对任意 $p(x)\in\mathscr{P}^s$，都有 $p(x)(1+|x|)^{-nb}\in L^{q'}(\boldsymbol{R}^n)$。

推论1.2说，空间 $L(\beta,q',s)$的函数，在无穷远处增长的阶满足一定的条件。

推论1.3 若 M 是一个 (p,q,s,ε) 分子，则对任意 $g\in L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right)$，有 $M(x)g(x)\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$。

推论1.3表明，每个(p,q,s,ε)分子 $M(x)$ 都以如下方式定义 $L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right)$的线性泛函：

$$M(g)=\int_{\boldsymbol{R}^n}M(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

下面我们证明本节的主要结果。

定理1.2 若M是一个(p,q,s,ε)分子，则$M\in H^{p,q,s}(\boldsymbol{R}^n)$，并且

$$\|M\|_{H^{p,q,s}}\leqslant C\mathscr{N}(M),$$

其中C是与M无关的常数。

证明 不失一般性，不妨假设M是中心为0的(p,q,s,ε)分子。先考虑$q=2$的情形。

令$\sigma^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}=\|M\|_2^{-1}$，$E_0=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ |x|\leqslant\sigma\}$，$E_k=\{x\in\boldsymbol{R}^n:2^{k-1}\sigma<|x|\leqslant 2^k\sigma\}$。记$M_k=M\chi_{E_k}$，其中$\chi_{E_k}$是$E_k$的特征函数。设$P_k$是$E_k$上次数不超过$s$的满足下面条件的唯一的多项式：

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}(M_k-P_k)x^\alpha\mathrm{d}x=0,\quad\forall\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant s,$$

其中规定$P_k(x)=0$当$x\notin E_k$。

我们来证明M_k-P_k是(p,q,s)原子的倍数，其倍数对k来说组成一几何级数。剩下的是证明$\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k$也有原子分解，其证明思想与§5.2定理2.1完全相同。

不失一般性，不妨设$\mathscr{N}(M)=1$。这时

$$\||\cdot|^{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}M(\cdot)\|_2^{1-\frac{a}{b}}=\|M\|_2^{-\frac{a}{b}},$$

因此

$$\||\cdot|^{n(\frac{1}{2}+\varepsilon)}M(\cdot)\|_2=\|M\|_2^{-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b-a}}=\sigma^{na}.$$

记$\{\varphi_l^k\}$是由$\{x^l\}$ $(0\leqslant|l|\leqslant s)$在$E_k$对于测度$\dfrac{\mathrm{d}x}{|E_k|}$经Gram-Schmidt正交化过程得到的标准正交基。这样

$$P_k(x)=\sum_{|l|\leqslant s}a_l^k\varphi_l^k(x),$$

其中

$$a_l^k=\int_{R^n}M_k(x)\varphi_l^k(x)\frac{dx}{|E_k|}.$$

记 $B_k=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |x|\leqslant 2^k\sigma\}$. 这样 $\mathrm{supp}(M_k-P_k)\subseteq E_k\subsetneq B_k$. 我们断言

$$\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|M_k-P_k|^2dx\leqslant\frac{C}{|E_k|}\int_{E_k}M_k^2dx. \tag{1.8}$$

事实上，由于

$$\int_{E_k}(M_k(x)-P_k(x))P_k(x)dx=0,$$

$$\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}[M_k(x)-P_k(x)]^2dx=\frac{1}{|B_k|}\int_{E_k}[M_k(x)-P_k(x)]\times M_k(x)dx.$$

而

$$\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}M_k(x)P_k(x)dx=\int_{E_k}M_k(x)\sum_{|l|\leqslant s}a_l^k\varphi_l^k(x)\frac{dx}{|E_k|}$$

$$=\sum_{|l|\leqslant s}a_l^k\int_{E_k}M_k(x)\varphi_l^k(x)\frac{dx}{|E_k|}$$

$$=\sum_{|l|\leqslant s}(a_l^k)^2=\int_{E_k}P_k^2(x)\frac{dx}{|E_k|}.$$

因此

$$\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|M_k-P_k|^2dx=\frac{1}{|B_k|}\int_{E_k}M_k^2dx-\frac{1}{|B_k|}\int_{E_k}P_k^2dx$$

$$\leqslant\frac{1}{|B_k|}\int_{E_k}M_k^2dx\leqslant\frac{C}{|E_k|}\int_{E_k}M_k^2dx,$$

这就是(1.8).特别地

$$\frac{1}{|B_0|}\int_{R^n}(M_0-P_0)^2dx\leqslant\frac{C}{|E_0|}\|M_0\|_2^2$$

$$\leqslant C\sigma^{-n}\sigma^{2n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}=C|B_0|^{-2/p}.$$

对 $k\geqslant 1$，我们有

$$\frac{1}{|B_k|}\int_{R^n}(M_k-P_k)^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{|E_k|}\int_{E_k}M_k^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{C}{|E_k|}\int_{E_k}M_k^2|x|^{n(1+2\varepsilon)}|x|^{-n(1+2\varepsilon)}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C(2^k\sigma)^{-n}(2^{k-1}\sigma)^{-n(1+2\varepsilon)}\int_{E_k}M_k^2|x|^{-n(1+2\varepsilon)}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sigma^{-2n(1+\varepsilon)}2^{-2kn-2kn\varepsilon}\sigma^{2na}$$

$$\leqslant C2^{-2kn-2kn\varepsilon-2kn/p}[(2^k\sigma)^n]^{-2/p}$$

$$=C2^{-2kna}|B_k|^{-2/p},$$

其中 C 只依赖于 n,ε。这就证明了 $M_k-P_k=\lambda_k a_k$，其中 a_k 是 $(p,2,s)$ 原子，支于 B_k，$|\lambda_k|\leqslant C2^{-nka}$。

用§5.2定理2.1中证明 P 可以由 (p,∞,s) 原子生成一样的方法，可以得到 P_k 的 (p,∞,s) 的原子分解，从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P_k(x)=\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{lk}a_{lk}(x),$$

其中 $a_{lk}(x)$ 是 (p,∞,s) 原子，而 $\sum\limits_{|l|\leqslant s}\sum\limits_{k}|\mu_{lk}|^p<\infty$。

总之，我们已经证明了

$$M=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k a_k+\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{lk}a_{lk},$$

其中 a_k 为 $(p,2,s)$ 原子，a_{lk} 为 (p,∞,s) 原子，

$$\sum_k|\lambda_k|^p+\sum_{|l|\leqslant s}\sum_k|\mu_{lk}|^p<\infty.$$

但这里 $M(x)$ 展开式是在逐点收敛意义下成立的，我们还必须证明，作为连续线性泛函，级数在 $L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0\right)$ 上的作用是与

M相同的，即我们要证明

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(\lambda_k\int_{R^n} g a_k \mathrm{d}x + \sum_{|l|\leqslant s}\mu_{lk}\int_{R^n} a_{lk} g \mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_{R^n} M g \mathrm{d}x$$

对所有 $g\in L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0\right)$成立。

事实上，对任意 $x\in \boldsymbol{R}^n$，存在 $k\geqslant 0$ 使得 $x\in E_k$。若 $k=0$，则

$$M(x)=\lambda_0 a_0(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\mu_{l0}a_{l0}(x);$$

若$k\geqslant 1$，则

$$M(x)=\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\sum_{j=k-1}^{k}\mu_{lj}a_{lj}(x).$$

因此，当$|x|\leqslant 2^{\bar{N}}\sigma$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\mu_{lk}a_{lk}(x)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\bar{N}}\left(\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\mu_{lk}a_{lk}(x)\right)$$

$$=M(x).$$

故

$$\int_{|x|\leqslant 2^{\bar{N}}\sigma}\sum_{k=0}^{\bar{N}}\left(\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leqslant s}\mu_{lk}a_{lk}(x)\right)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{|x|\leqslant 2^{\bar{N}}\sigma}M(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

令$\bar{N}\to\infty$，右边的极限为$\int_{R^n}M(x)g(x)\mathrm{d}x$。由于左边是有限和，

可以交换求和与积分的次序，因此它的极限为

$$\lim_{\bar{N}\to\infty}\sum_{k=0}^{\bar{N}}\int_{|x|\leq 2^{\bar{N}}\sigma}\Big(\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leq k}\mu_{lk}a_{lk}(x)\Big)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\bar{N}\to\infty}\sum_{k=0}^{\bar{N}}\int_{R^n}\Big(\lambda_k a_k(x)+\sum_{|l|\leq s}\mu_{lk}g_{lk}(x)\Big)g(x)\mathrm{d}x,$$

这正是所要求的。

对于 $q=2$，$0<p<1$ 的情形，我们已证明了定理1.2。对于 $p=1$，级数在 L^1 意义下收敛到 M，证明也是正确的。对 $q\neq 2$，如同§5.2定理2.1证明中关于 $q\neq 2$ 的说明，只需证明

$$\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{R^n}|M_k-P_k|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leq C\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{R^n}|M_k|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

首先注意到 $\{\varphi_l^k\}$，$|l|\leq s$，一致有界，而

$$P_k(x)=\sum_{|l|\leq s}a_l^k\varphi_l^k(x),$$

其中

$$a_l^k=\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}P_k(x)\varphi_l^k(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}M_k(x)\varphi_l^k(x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\sup_{x\in E_k}|P_k(x)|\leq C\sum_{|l|\leq s}|a_l^k|\leq C\left(\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}|M_k(x)|\mathrm{d}x\right)$$

$$\leq C\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|M_k(x)|\mathrm{d}x\right)\leq C\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|M_k(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

故

$$\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|M_k-P_k|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leq\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{R^n}|M_k|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}+\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|P_k(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leq\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{R^n}|M_k|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}+\sup_{x\in E_k}|P_k(x)|$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{R^n}|M_k|^q dx\right)^{1/q}.$$

综合引理1.4与定理1.2便得到

定理1.3 $L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0\right)$ 上的连续线性泛函 $f\in H^{p,q,s}(R^n)$，当且仅当

$$f=\sum_j \lambda_j M_j,$$

其中 M_j 是 (p,q,s,ε) 分子，其分子范数一致有界，且 $\sum_j|\lambda_j|^p<\infty$。进一步

$$\|f\|_{H^{p,q,s}}=\inf\left\{(\sum|\lambda_j|^p)^{\frac{1}{p}}: 对所有分解\ f=\sum_j \lambda_j M_j\right\}.$$

§6.2 算子在 H^p 空间上的作用

正如前面指出过的，H^p 空间的原子、分子刻画，为研究线性算子在其上的作用提供了十分便利的条件。本节只对两个具体的算子，看它们在 H^p 空间的表现。这里所用到的方法，已经十分典型。对更广的一类算子在 H^p 空间上的作用，在第十章还要作更详尽的研究。

第一个算子是 Hilbert 变换。我们早就知道它是 L^p 到 L^p $(1<p<\infty)$ 有界的。但它不是 L^1 到 L^1 有界的（只是弱(1.1)型）。在上一节的开始，我们证明了它把 H^1 的原子映成分子((1,2,0,1/2)分子)，并且其分子模被一个与分子选择无关的常数控制(见(1.2)式)。用本章分子分解定理1.3，便知 Hilbert 变换是 H^1 到 H^1 有界的。事实上，对任意 $f\in H^1(R)$，由原子分解定理知

$$f=\sum\lambda_j a_j,$$

其中 a_j 是 $(1,\infty)$ 原子，$\sum|\lambda_j|\leqslant 2\|f\|_{H^1}$。由于

$$H(f)=\sum\lambda_j H(a_j),$$

而 $\mathscr{N}(H(a_j))\leqslant C$，故

$$\|H(f)\|_{H^1}\leqslant\sum|\lambda_j|\,\|H(a_j)\|_{H^1}\leqslant C\sum|\lambda_j|\mathscr{N}(H(a_j))$$
$$\leqslant C\sum|\lambda_j|\leqslant C\|f\|_{H^1}.$$

下面我们看 Hilbert 变换在 H^p 的作用。

定理2.1 当 $1/2<p\leqslant 1$ 时，Hilbert 变换 H 是 H^p 到 L^p 有界的。

证明 首先证明，若 a 是$(p,2,0)$原子，$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$，则 $\|H(a)\|_p\leqslant C$，其中 C 与原子 a 无关。

不失一般性，可设 a 的支集是以原点为中心的区间 I。这时

$$\int_{\mathbf{R}}|H(a)(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_{2I}|H(a)(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$+\int_{(2I)^c}|H(a)(x)|^p\mathrm{d}x=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

由于H是 L^2 有界，用 Hölder 不等式，我们有

$$\mathrm{I}\leqslant C|I|^{1-\frac{p}{2}}\left(\int_{2I}|H(a)(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{p/2}$$
$$\leqslant C|I|^{1-\frac{p}{2}}\|a\|_2^p$$
$$\leqslant C|I|^{1-\frac{p}{2}}|I|^{p(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}=C.$$

对于 $x\in 2I$，我们可以得到点估计

$$|H(a)(x)|=\left|\int_I\frac{a(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right|=\left|\int_I\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x}\right)a(y)\mathrm{d}y\right|$$
$$=\left|\int_I\frac{ya(y)}{x(x-y)}\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant C\frac{|I|}{|x|^2}\int_I|a(y)|\mathrm{d}y\leqslant C\frac{|I|^{2-1/p}}{|x|^2}.$$

从而

$$\text{II} \leqslant \int_{|x|\geqslant 2|I|} |H(a)(x)|^p dx \leqslant C\int_{|x|>2|I|} \left(\frac{|I|^{2-1/p}}{|x|^2}\right)^p dx$$

$$\leqslant C|I|^{2p-1}\int_{|x|\geqslant 2|I|} \frac{1}{|x|^{2p}} dx = C.$$

这就证明了$\|H(a)\|_p \leqslant C$。

对于任意的$f\in H^p(R^1)$，这时有原子分解

$$f = \sum \lambda_j a_j,$$

其中a_j是$(p,2,0)$原子，$\sum|\lambda_j|^p \leqslant 2\|f\|_{H^p}^p$。这时

$$\|H(a)\|_p \leqslant \sum_j |\lambda_i|^p \|H(a_j)\|_p^p \leqslant C \sum_i |\lambda_j|^p \leqslant C\|f\|_{H^p}^p.$$

进一步，我们还有

定理2.2 当$\frac{1}{2}<p<1$时，Hilbert变换是H^p到自身有界的。

证明 应用上一定理证明中最后一步的类似推理，只需证明，对每个$(p,2,0)$原子a，$H(a)$是$(p,2,0,\varepsilon)$分子，且其分子范数被一个与a无关的常数控制。

记$M(x)=H(a)(x)$。显然$M(x)$满足消失矩条件。因此，只需验证分子大小条件。首先，注意$a=1-\frac{1}{p}+\varepsilon$，$b=1-\frac{1}{q}+\varepsilon=\frac{1}{2}+\varepsilon$，$a-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$，

$$\|M\|_2 = \|H(a)\|_2 \leqslant C\|a\|_2 \leqslant C|I|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} = C|I|^{a-b}.$$

考虑

$$\int_R |x|^{1+2\varepsilon}|M(x)|^2 dx = \int_{2I} + \int_{(2I)^c} = \text{I} + \text{II}.$$

对于第一项

$$\mathrm{I} \leqslant C|I|^{1+2\varepsilon}\int_{R}|M(x)|^{2}\mathrm{d}x \leqslant C|I|^{2+2\varepsilon-\frac{2}{p}} = C|I|^{2a}.$$

对于Ⅱ，利用定理2.1证明中得到的点估计

$$|H(a)(x)| \leqslant C\frac{|I|^{2-\frac{1}{p}}}{|x|^{2}},$$

知

$$\mathrm{II} \leqslant C|I|^{4-2/p}\int_{|x|\geqslant 2|I|}\frac{|x|^{1+2\varepsilon}}{|x|^{4}}\mathrm{d}x,$$

选择 $0<\varepsilon<1$，便得

$$\mathrm{II} \leqslant C|I|^{2+2\varepsilon-\frac{2}{p}} = C|I|^{2a}.$$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(M) &= \|M\|_{2}^{\frac{a}{b}}\||\cdot|^{1+2\varepsilon}M(\cdot)\|_{2}^{1-\frac{a}{b}}\\ &\leqslant C|I|^{\frac{a}{b}(a-b)}|I|^{a\left(1-\frac{a}{b}\right)}\\ &= C,\end{aligned}$$

这就证明了定理2.2.

显然，不难把这两个定理推广到高维的 Riesz 变换，当然，这时 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 应代之以 $\frac{n}{n+1}<p\leqslant 1$. 特别地，我们知道 Riesz 变换是 H^1 到 L^1（实际上是到 H^1）有界的.

下面我们研究分数次积分（Riesz 位势）算子在 H^p 空间上的作用.

定义2.1 设 $0<a<n$. 我们定义 f 的 a 次积分算子为

$$I^{a}(f)(x) = \gamma(a)\int_{R^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-a}}\mathrm{d}y,$$

其中

$$\gamma(a) = \pi^{\frac{n}{2}}2^{a}\,\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{a}{2}\right).$$

有关分数次积分算子 I^{α} 的熟知结果是（例如参考 [St4]）：若 $0<\alpha<n$，$1<p_1<p_2<\infty$，$\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}$，则 I^{α} 是 L^{p_1} 到 L^{p_2} 的有界算子。我们将推广这结果到 H^p 空间。

定理2.3 设 $0<p_1\leqslant 1$，$\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}$。

(i) 若 $p_2>1$，$0<\alpha<n$，则 I^{α} 是 $H^{p_1}(\boldsymbol{R}^n)$到 $L^{p_2}(\boldsymbol{R}^n)$的有界线性算子；

(ii) 若 $p_1<p_2\leqslant 1$，$0<\alpha<1$,则 I^{α} 是 $H^{p_1}(\boldsymbol{R}^n)$ 到 $H^{p_2}(\boldsymbol{R}^n)$ 的有界线性算子。

在证明定理之前，值得指出的是,(ii)中对 α 的限制 $0<\alpha<1$ 是不重要的，因为分数次积分有半群性质

$$I^{\alpha+\beta}=I^{\alpha}I^{\beta},$$

由此便可以把(ii)的结果推广到 $\alpha\geqslant 1$ 的情形。

证明 (i) 选取 $s>n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)$与 $1<q_1<q_2<\infty$,使得$\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}=\frac{\alpha}{n}$。由于 $H^{p_1}(\boldsymbol{R}^n)=H^{p_1,q_1,s}(\boldsymbol{R}^n)$，如果 a 是任意 (p_1,q_1,s) 原子，那末只需证明 $\|I^{\alpha}(a)\|_{p_2}\leqslant C$，其中 C 与 a 的选取无关。

设 a 的支集为方体 Q。不妨设 Q 的中心在原点。用 $2Q$ 表示与 Q 同心边长为 Q 的 2 倍的方体。这时

$$\begin{aligned}\|I^{\alpha}(a)\|_{p_2}&\leqslant\left(\int_{2Q}|I^{\alpha}(a)(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}\\&\quad+\left(\int_{(2Q)^c}|I^{\alpha}(a)(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}\\&=\mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

由 $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{q_2}+\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)$，应用 Hölder 不等式以及 I^{α} 在 L^p 作用的已知结果，知

$$\mathrm{I}\leqslant C|Q|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}\|I^{\alpha}(a)\|_{q_2}\leqslant C|Q|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}\|a\|_{q}$$

$$\leqslant C|Q|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}|Q|^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}}=C.$$

记 $g(x)=\dfrac{1}{|x|^{\alpha}}$，写出 g 的 s 阶 Taylor 展开式

$$g(x-y)=P(x,y)+R(x,y),$$

其中

$$P(x,y)=\sum_{|\nu|<s}\frac{\mathrm{D}^{\nu}(g)(x)}{\nu!}(-y)^{\nu},$$

$$R(x,y)=\sum_{|\nu|=s}\frac{\mathrm{D}^{\nu+1}(g)(x-\theta y)}{(\nu+1)!}(-y)^{\nu+1},\quad 0<\theta<1.$$

注意到 $y\in Q$，$x\in(2Q)^c$，便可得估计

$$|R(x,y)|\leqslant C\frac{|y|^{s+1}}{|x|^{n-\alpha+s+1}}.$$

注意到 $a(y)$的消失矩条件，便有

$$\mathrm{II}\leqslant\gamma(\alpha)\left(\int_{x\in(2Q)^c}\left|\int_Q\left[\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}-P(x,y)\right]a(y)\mathrm{d}y\right|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}$$

$$\leqslant C\left(\int_{x\in(2Q)^c}\left|\int_{y\in Q}\frac{|a(y)||y|^{s+1}}{|x|^{n-\alpha+s+1}}\mathrm{d}y\right|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}$$

$$\leqslant C\|a\|_{q_1}|Q|^{\frac{s+1}{n}+1-\frac{1}{q_1}}\left(\int_{(2Q)^c}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^{(n-\alpha+s+1)p_2}}\right)^{1/p_2}$$

$$\leqslant C\|a\|_{q_1}|Q|^{\frac{s+1}{n}+1-\frac{1}{q_1}}|Q|^{-1+\frac{\alpha}{n}-\frac{s+1}{n}+\frac{1}{p_2}}$$

$$=C\|a\|_{q_1}|Q|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_1}+\frac{\alpha}{n}}$$

$$=C\|a\|_{q_1}|Q|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}=C.$$

(ii) 设 α,q_1,q_2 等如 (i)。取 $\dfrac{1}{p_1}-1<\varepsilon<(s+1-\alpha)/n$。

$a=1-\frac{1}{p_2}+\varepsilon, b=1-\frac{1}{q_2}+\varepsilon$。我们只需证明，$I^\alpha(a)$ 是一个$\left(p_2, q_2,\right.$ $\left.\left[n\left(\frac{1}{p_2}-1\right)\right], \varepsilon\right)$分子，且 $\mathscr{N}(I^\alpha(a))\leqslant C$。

由(i)的结果

$$\|I^\alpha(a)\|_{q_2}\leqslant C\|a\|_{q_1},$$

分解

$$\||x|^{nb}I^\alpha(a)(x)\|_{q_2}\leqslant\||x|^{nb}I^\alpha(a)(x)\chi_{2Q}(x)\|_{q_2}$$

$$+\||x|^{nb}I^\alpha(a)(x)\chi_{(2Q)^c}(x)\|_{q_2}=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

用(i)的结果

$$\mathrm{I}\leqslant|Q|^b\|I^\alpha(a)\|_{q_2}\leqslant C\|a\|_{q_1}|Q|^b,$$

类似于(i)有

$$\mathrm{II}\leqslant C\left(\int_{x\in(2Q)^c}\left|\int_{y\in Q}\frac{|a(y)||y|^{s+1}}{|x|^{n-\alpha+s+1}}\mathrm{d}y\,|x|^{nb}\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{1/q_2}$$

$$\leqslant C\|a\|_{q_1}|Q|^{\frac{s+1}{n}+1-\frac{1}{q_1}}\left(\int_{(2Q)^c}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^{(n-\alpha+s+1-nb)q_2}}\right)^{1/q_2}$$

$$\leqslant C\|a\|_{q_1}|Q|^{\frac{s+1}{n}+1-\frac{1}{q_1}}|Q|^{-1+\frac{\alpha}{n}-\frac{s+1}{n}+b+\frac{1}{q_2}}$$

$$\leqslant C\|a\|_{q_1}|Q|^b.$$

故

$$\mathscr{N}(I^\alpha(a))=\|I^\alpha(a)\|_{q_2}^{a/b}\||x|^{nb}I^\alpha(a)\|_{q_2}^{1-a/b}$$

$$\leqslant\|a\|_{q_1}^{a/b}\|a\|_{q_1}^{1-a/b}|Q|^{b(1-a/b)}$$

$$=C\|a\|_{q_1}|Q|^{b-a}=C\|a\|_{q_1}|Q|^{1/p_2-1/q_2}$$

$$\leqslant C.$$

剩下来还需验证 $I^\alpha(a)$ 满足消失矩条件，即要证明，对任意 $0\leqslant|\nu|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p_2}-1\right)\right]$，有

$$\int_{R^n} x^\nu I^\alpha(a)(x)\mathrm{d}x = 0. \qquad (2.1)$$

事实上，由于对 s，ε 的选择要求，由 $I^\alpha(a)\in L^{q_2}$，$|x|^{nb}I^\alpha(a)\in L^{q_2}$，知 $|x|^\nu I^\alpha(a)\in L^1$。故 $(\mathrm{D}^\nu I^\alpha(a))^\wedge$ 是连续函数。不难由 a 有 s 阶消失矩证得 $\hat{a}(\xi)=O(|\xi|^{s+1})$，当 $\xi\to 0$（也可参见下节的命题3.1）。注意到 $(I^\alpha(a))^\wedge(\xi)=C|\xi|^{-\alpha}\hat{a}(\xi)$，便有 $(I^\alpha(a))^\wedge(\xi)=O|\xi|^{s+1-\alpha})$，当 $\xi\to 0$。由于当 $0\leqslant|\nu|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p_2}-1\right)\right]$ 时，$s+1-|\nu|-\alpha>0$，故 $(\mathrm{D}^\nu I^\alpha(a))^\wedge(0)=0$，这就是(2.1)所要求的。

§6.3 H^p空间的乘子定理

利用 H^p 空间的原子与分子刻画，可以得到 H^p 空间乘子的许多结果。函数 $m(x)$ 称为 H^p 空间的乘子，如果 $m(x)$ 是可测函数，且对任意 $f\in H^p$，$(m\hat{f})^\vee$ 也是 H^p 空间的函数，并且 $f\to(m\hat{f})^\vee$ 是 H^p 的有界线性算子。这时，算子的范数也称为乘子 m 的范数。问题在于，这些运算是否有意义。当然，$f\in H^p$ 蕴含了 $f\in\mathscr{S}'$，因此，$\hat{f}\in\mathscr{S}'$。但可测函数与广义函数的乘积是否还能取 Fourier 逆变换？因此，在讲述乘子定理之前，需要讨论 H^p 函数的 Fourier 变换的一些性质。

引理3.1 设 a 是 $(p,2,s)$ 原子，支于以原点为中心的方体 Q 上，$0\leqslant|\alpha|\leqslant s$，则

(i) $$|\mathrm{D}^\alpha\hat{a}(\xi)|\leqslant C\frac{|\xi|^{s+1-|\alpha|}}{\|a\|_2^{d\left(\frac{s+1}{n}+\frac{1}{2}\right)-1}},$$

(ii) $$\|(\mathrm{D}^\alpha\hat{a})^2\|_{r'}\leqslant\frac{C}{\|a\|_2^{d\left(\frac{2|\alpha|}{n}+\frac{1}{r}\right)-2}},$$

其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$，$1\leqslant r'\leqslant\infty$，$d=1\Big/\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$，$C$ 与 a 无关。

证明 (i) 由原子定义知

$$|Q|\leqslant\|a\|_2^{-d}.$$

选取 $P(x)$ 为 $e^{-2\pi ix\cdot\xi}$ 在原点的 $s-|\alpha|$ 阶 Taylor 多项式，则

$$D^\alpha\hat{a}(\xi)=\int_Q a(x)(-2\pi ix)^\alpha e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx$$

$$=\int_Q a(x)(-2\pi ix)^\alpha[e^{-2\pi ix\cdot\xi}-P(x)]dx.$$

故

$$|D^\alpha\hat{a}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{s+1-|\alpha|}\int_Q|a(x)||x|^{s+1}dx$$

$$\leqslant C|\xi|^{s+1-|\alpha|}|Q|^{\frac{s+1}{n}+\frac{1}{2}}\|a\|_2$$

$$\leqslant C|\xi|^{s+1-|\alpha|}\|a\|_2^{-d\left(\frac{s+1}{n}+\frac{1}{2}\right)+1}.$$

(ii) 当 $r'=1$ 时，$r=\infty$，这时

$$\int|D^\alpha\hat{a}(\xi)|^2d\xi=C\int_Q|x^\alpha|^2|a(x)|^2dx$$

$$\leqslant C|Q|^{\frac{2|\alpha|}{n}}\|a\|_2^2\leqslant C\|a\|_2^{-d\cdot\frac{2|\alpha|}{n}+2},$$

所要求的结论成立。

当 $r'=\infty$ 时，$r=1$，这时

$$|D^\alpha\hat{a}(\xi)|^2=C\left(\int_Q|x^\alpha||a(x)|dx\right)^2$$

$$\leqslant C|Q|^{\frac{2|\alpha|}{n}+1}\|a\|_2^2$$

$$\leqslant C\|a\|_2^{-d\left(\frac{2|\alpha|}{n}+1\right)+2},$$

所要求的结果也成立。

利用 $r'=1$ 与 $r'=\infty$ 的结果，不难对一般的 $1<r'<\infty$，推

出所要求的结果。

值得指出的是，即使原子 a 的支集 Q 不是以原点为中心，引理 3.1 的结论依然成立，因为 a 经平移后取 Fourier 变换，与原来的只差一个模为 1 的复数因子。

若在引理 3.1 中令 $\alpha=0$，则

$$|\hat{a}(\xi)|\leqslant C\frac{|\xi|^{s+1}}{\|a\|_2^{d\left(\frac{s+1}{n}+\frac{1}{2}\right)-1}}, \tag{3.1}$$

$$|\hat{a}(\xi)|\leqslant\frac{C}{\|a\|_2^{d/2-1}}. \tag{3.2}$$

在 $|\xi|^n\leqslant\|a\|_2^d$ 时运用(3.1)，在 $|\xi|^n\geqslant\|a\|_2^d$ 时运用(3.2)，便得到

$$|\hat{a}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}. \tag{3.3}$$

由此可得以下命题：

命题3.1 若 $f\in H^p(R^n)$，$0<p\leqslant1$，则 $\hat{f}$ 是连续函数，且

$$|\hat{f}(\xi)|\leqslant C\|f\|_{H^p}|\xi|^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)},$$

其中 C 与 f 无关。

证明 利用 $H^p(\boldsymbol{R}^n)=H^{p,2,s}(\boldsymbol{R}^n)$，当 $f\in H^p$ 时，有

$$f=\sum_j\lambda_j a_j,$$

其中 a_j 是$(p,2,s)$ 原子，$\sum|\lambda_j|^p\leqslant2\|f\|_{H^p}^p$。这时

$$\hat{f}=\sum_j\lambda_j\hat{a}_j,$$

其中 $\hat{a}_j(\xi)$满足估计式(3.3)。由于 $\sum|\lambda_j|\leqslant(\sum|\lambda_j|^p)^{1/p}$，知 $\sum\lambda_j\hat{a}_j$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 任意紧集一致收敛到 $\hat{f}$，故 $\hat{f}$ 是连续函数，且

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)|&\leqslant C\sum|\lambda_j||\xi|^{n(1/p-1)}\\&\leqslant C(\sum|\lambda_j|^p)^{1/p}|\xi|^{n(1/p-1)}\end{aligned}$$

$$\leqslant C\|f\|_{H^p}|\xi|^{n(1/p-1)}.$$

下面我们可以得到 H^p 乘子的必要条件了。

命题3.2 若m是 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$的乘子($0<p\leqslant 1$)，其范数为M，则存在与m无关的常数C，使得对一切$\xi\neq 0$有$|m(\xi)|\leqslant CM$。进一步，m在$R^n\backslash\{0\}$连续。

证明 由m是 H^p 乘子，知

$$\|(m\hat{f})^\vee\|_{H^p}\leqslant M\|f\|_{H^p}. \tag{3.4}$$

令$f_t(x)=t^{-n/p}f(x/t)$，$t>0$，则$f\to f_t$是 H^p 的有界算子，且

$$\|f_t\|_{H^p}=\|f\|_{H^p}. \tag{3.5}$$

这是因为，如果a是(p,∞,s)原子，支于方体Q，那末a_t支于Q_t（由Q经展缩$x\to x/t$得到），且

$$\|a_t\|_\infty\leqslant t^{-n/p}\|a\|_\infty\leqslant t^{-n/p}|Q|^{-1/p}=|Q_t|^{-1/p},$$

即得a_t也是(p,∞,s)原子。

由命题3.1与式(3.4),(3.5)，得

$$|m(\xi)\hat{f}_t(\xi)|\leqslant CM\|f\|_{H^p}|\xi|^{n(1/p-1)}. \tag{3.6}$$

注意到

$$\hat{f}_t(\xi)=t^{n(1-1/p)}\hat{f}(t\xi),$$

对$\xi\neq 0$，令$\xi'=\xi/|\xi|$，$t=|\xi|^{-1}$，代入(3.6)，有

$$|m(\xi)\hat{f}(\xi')|\leqslant CM\|f\|_{H^p}.$$

取某个$f_0\in H^p(\boldsymbol{R}^n)$，使得$\hat{f}_0(\xi')=1$。这是容易办到的。例如取$\eta\in C^\infty(\boldsymbol{R})$，$\operatorname{supp}\eta\subset\left[\frac{1}{4},4\right]$，$|\eta|\leqslant 1$，而在$\left(\frac{1}{2},2\right)$中$\eta=1$。令$\hat{f}_0(\xi)=\eta(|\xi|)$。利用 Plancherel 等式，不难验证$f_0$是$(p,2,s,\varepsilon)$分子，从而$f_0\in H^p(\boldsymbol{R}^n)$。这就证明了

$$|m(\xi)|\leqslant CM\|f_0\|_{H^p}=CM.$$

从上面的证明过程看出，在$\xi\neq 0$时，$m(\xi)$等于一个H^p函数的 Fourier 变换，因而是连续的。

引理3.2 设k是整数，$k>\frac{n}{2}$，且

$$R^{2|\beta|-n}\int_{R<|x|<2R}|D^{\beta}m(x)|^{2}dx\leqslant A^{2}\qquad(3.7)$$

对一切 $0\leqslant|\beta|\leqslant k$ 与 $R>0$ 成立，则存在与 m 无关的常数 C，使得当 $r=1$ 或 $\frac{n}{r}>2(|\beta|-k)+n$ 时，有

$$\left[\int_{R<|x|<2R}|D^{\beta}m(x)|^{2r}dx\right]^{1/r}\leqslant C^{2}A^{2}R^{n/r-2|\beta|};\qquad(3.8)$$

当 $2(|\beta|-k)+n<0$ 时，有 $|x|^{|\beta|}|D^{\beta}m(x)|\leqslant CA$ 且 $D^{\beta}m(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n}\setminus\{0\}$ 上的连续函数。

值得指出的是，若 $\beta=0$，这时 $n-2k<0$，则从引理推知 $m(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n}\setminus\{0\}$ 上的连续有界函数，其界仅依赖于 A。

证明 取径向函数 $\eta\in C^{\infty}$，非负，$\eta\leqslant1$，$\text{supp}\eta\subset\left\{x\in\boldsymbol{R}^{n}:\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant4\right\}$，而在 $\{x:1\leqslant|x|\leqslant2\}$ 上 $\eta=1$。令

$$f(x)=R^{|\beta|}\eta\left(\frac{x}{R}\right)D^{\beta}m(x),$$

$$g(x)=f(Rx)=R^{|\beta|}\eta(x)D^{\beta}m(Rx).$$

由条件(3.7)知 $\|D^{\nu}g\|_{2}\leqslant C'A$，只要 $0\leqslant|\nu|\leqslant l=k-|\beta|$，其中 C' 与 m,ν,k,R 无关。

由此得 $g\in L_{l}^{2}(\boldsymbol{R}^{n})$(Sobolev 空间)。由嵌入定理，当 $l>\frac{n}{2}$ 时，$L_{l}^{2}\subset C_{0}$，即 g 连续且在无穷远处趋向于零；当 $l>\frac{n}{2}-\frac{n}{q}\geqslant0$ 时，$L_{l}^{2}\subset L^{q}$。特别地 $\|g\|_{q}\leqslant CA$，其中 C 与 m,R 无关。记 $2r=q$，则 $l>\frac{n}{2}-\frac{n}{q}$ 可写成 $\frac{n}{r}>2(|\beta|-k)+n$，这时

$$\left[\int_{R<|x|<2R}|D^{\beta}m(x)|^{2r}dx\right]^{1/r}\leqslant R^{-2|\beta|}\left(\int_{\boldsymbol{R}^{n}}|f(x)|^{2r}dx\right)^{1/r}$$

$$= R^{n/r-2|\beta|}\left(\int_{R^n}|g(x)|^{2r}dx\right)^{1/r} = R^{n/r-2|\beta|}\|g\|_{2r}^2$$

$$\leqslant C^2A^2R^{n/r-2|\beta|}.$$

定理3.1（H^p乘子定理） 设 $0<p\leqslant 1, \frac{1}{p}-\frac{1}{2}<\frac{k}{n}$，函数 $m(x)$对 $0\leqslant|\beta|\leqslant k$ 与 $R>0$ 满足

$$R^{2|\beta|-n}\int_{R<|x|<2R}|D^\beta m(x)|^2dx\leqslant A^2,$$

则m是 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ 的乘子，且存在常数C，使得乘子m的范数$\leqslant CA$。

证明 设a是一个 $(p,2,s_1)$ 原子，$s\leqslant s_1$，取 ε 满足分子条件，则 a 是一个 $(p,2,s,\varepsilon)$ 分子，且$\mathscr{N}(a)\leqslant C$，其中$C$与$a$无关。特别地，如果$a$的支集中心在原点，$k=n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)=nb$ 是整数时，由 Plancherel 定理知

$$\left\{\|\hat{a}\|_2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{k}{n}\right)}\|D^r\hat{a}\|_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{n}{k}}\leqslant C$$

对一切$|r|=k$成立。

我们来证明，若a是一个 $(p,2,k-1)$ 原子，则 $(m\hat{a})^\vee$ 是一个$\left(p,2,\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)$且中心在原点的分子，还有

$$\mathscr{N}((m\hat{a})^\vee)\leqslant CA,$$

其中C仅依赖于p,k,n。

首先验证分子的大小条件。用 Plancherel 定理，我们只要证明

$$\left(\|(m\hat{a})\|_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{k}{n}}\|D^r(m\hat{a})\|_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{k}}\leqslant CA \tag{3.9}$$

对一切$|\nu|=k$成立。

记$d=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)^{-1}$，则（3.9）可以改写成

$$\|D^{\nu}(m\hat{a})\|_2\leqslant CA^{kd/n}\|m\hat{a}\|_2^{1-kd/n}.$$

由于$1-kd/n\leqslant 0$，而引理3.2表明，$|m(x)|\leqslant CA$。故只要证明

$$\|D^{\nu}(m\hat{a})\|_2\leqslant CA\|a\|_2^{1-kd/n}$$

就够了。用Leibniz公式，只需对一切$|\alpha|+|\beta|=\nu$证明

$$\|(D^{\alpha}\hat{a})(D^{\beta}m)\|_2\leqslant CA\|a\|_2^{1-\frac{kd}{n}}. \qquad (3.10)$$

事实上，若$\beta=0$，$\alpha=k$，则由引理3.1的(ii)(取$r'=1$)便得到(3.10)。若$0<|\beta|<k$，用引理3.1的(i)，则

$$\|(D^{\alpha}\hat{a})(D^{\beta}m)\|_2^2=\sum_{l\in z}\int_{2^l<|x|<2^{l+1}}|D^{\alpha}\hat{a}(\xi)|^2|D^{\beta}m(\xi)|^2d\xi$$

$$\leqslant C\sum_{-\infty}^{N}\|a\|_2^{2\left(1-\frac{kd}{n}-\frac{d}{2}\right)}2^{2l(k-|\alpha|)}\int_{2^l<|x|\leqslant 2^{l+1}}|D^{\beta}m(\xi)|^2d\xi$$

$$+\sum_{N}^{\infty}\left(\int_{2^l<|x|\leqslant 2^{l+1}}|D^{\alpha}\hat{a}(\xi)|^{2r'}d\xi\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\times\left(\int_{2^l<|x|\leqslant 2^{l+1}}|D^{\beta}m(x)|^{2r}dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

由定理的条件知

$$\mathrm{I}\leqslant CA^2\sum_{-\infty}^{N}\|a\|_2^{2\left(1-\frac{kd}{n}-\frac{d}{2}\right)}2^{ln}\leqslant CA^22^{nN}\|a\|_2^{2\left(1-\frac{kd}{n}-\frac{d}{2}\right)}.$$

选择N，使$2^{nN}\sim\|a\|_2^d$，便得

$$I\leqslant CA^2\|a\|_2^{2\left(1-\frac{kd}{n}\right)}.$$

现在估计Ⅱ．当 $|\beta|>\frac{n}{2}$ 时取 $r=1$．当 $0<|\beta|\leqslant\frac{n}{2}$ 且 $0<|\beta|<k-\frac{n}{2}$ 时取 $r=\infty$．剩下当 $k-\frac{n}{2}\leqslant|\beta|\leqslant\frac{n}{2}$ 时（这时只有 $k\leqslant n$ 才可能），取 r 使得 $1<r<\infty$ 且 $0<2|\beta|-\frac{n}{r}<2k-n$．总之，在各种情形，我们都可以取 r，使得 $2|\beta|-\frac{n}{r}>0$ 以及 r,β 使引理3.2的条件满足，从而(3.8)成立．于是用引理3.1中(ii)，有

$$\text{II}\leqslant CA^2\sum_N^{\infty}\|a\|_2^{-d\left(\frac{2|\alpha|}{n}+\frac{1}{r}\right)+2}2^{\left(\frac{n}{r}-2|\beta|\right)l}$$

$$\leqslant CA^2\|a\|_2^{-d\left(\frac{2|\alpha|}{n}+\frac{1}{r}\right)+2}2^{N\left(\frac{n}{r}-2|\beta|\right)}.$$

注意到 $2^{nN}\sim\|a\|_2^d$，便得

$$\text{II}\leqslant CA^2\|a\|_2^{2\left(1-\frac{kd}{n}\right)}.$$

这就证明了(3.10)，从而得到(3.9)．

其次证明 $(m\hat{a})^{\vee}$ 满足消失矩条件．如同定理2.3证明的最后部分那样，由(3.9)便知当 $|\nu|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 时，$D^{\nu}(m\hat{a})$ 是连续函数．由引理3.2知 $m(\xi)$ 有界，而 $\hat{a}(\xi)=O(|\xi|^k)$，当 $|\xi|\to0$．故 $(m\hat{a})(0)=0$，即 $m\hat{a}$ 有0阶消失矩．对一般的 $0<|\nu|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\leqslant k-1$，由于

$$D^{\nu}(m\hat{a})(0)=\lim_{h\to0}h^{-|\nu|}\Delta_h^{\nu}(m\hat{a})(0),$$

其中 Δ_h^{ν} 表示 ν 阶差分，而 $|\Delta_h^{\nu}(m\hat{a})(0)|\leqslant C|h|^k$，故 $D^{\nu}(m\hat{a})(0)=0$，即 $(m\hat{a})^{\vee}$ 具有所要求的消失矩条件．

注意到 $g\to(m\hat{g})^{\vee}$ 是平移不变的，则上述结果对中心不在原

点的原子也相应地成立。

对一般的$f\in H^p$，有

$$f\simeq\sum_j\lambda_j a_j,$$

其中a_j为$(p,2,k-1)$原子，$\sum|\lambda_j|^p\leqslant 2\|f\|_{H^p}^p$。应用上面的结果于

$$(m\hat{f})^\vee=\sum\lambda_j(m\hat{a}_j)^\vee,$$

便得

$$\begin{aligned}\|(m\hat{f})^\vee\|_{H^p}&\leqslant\sum|\lambda_j|\|(m\hat{a}_j)^\vee\|_{H^p}\leqslant C\sum|\lambda_j|\mathscr{N}((m\hat{a}_j)^\vee)\\&\leqslant CA\sum|\lambda_j|\leqslant CA(\sum|\lambda_j|^p)^{1/p}\\&\leqslant CA\|f\|_{H^p}.\end{aligned}$$

从§6.2与§6.3定理的证明可以看出，H^p空间的原子、分子刻画，为我们研究算子的有界性，提供了很大的便利。

§6.4 注释与进一步的结果

注释

R. Coifman 于1974年通过指数型函数给出了H^p函数的 Fourier 变换的特征刻画，并由此得到H^p乘子定理. 分子概念第一次在那里出现[Co2]。以后 Coifman-Weiss 进一步发展分子理论[CW2]。分子理论的最终完成属于 Taibleson-Weiss。本章主要内容取材于[TW1]。

Campanato-Meyers 空间([Cam1],[Mey])实际上是 Lipschitz 空间，它的研究已有很长的历史了，见[Z]。高维情形见[T1]，[T2],[St4]。有关内容还可参阅[P2]，[TW1]。

关于分数次积分(Riesz 位势)在L^p空间的作用，Stein 的书有详细的叙述[St4]。定理2.3当$p_1=1$时是属于 Stein-Weiss的，一般情形$0<p_1<p_2\leqslant 1$是 Taibleson-Weiss 首次用分子理论加以证明的[TW1]。

§6.3中介绍的乘子定理3.1，$p>1$ 时的结果属于Hörmander [Hö1]，也可参看[St4]. 这里 $0<p\leqslant 1$ 的结果也是Taibleson-Weiss应用分子理论首次证明的。

进一步的结果

1. 从本质上讲，所谓分子是指一类函数，除满足 H^p 空间中函数所必须具备的消失矩条件外，还满足一定的大小条件。从这个角度看，分子表示某一类型的嵌入定理。显然，我们希望这类嵌入定理所要求的条件越弱越好。因为嵌入定理的条件越弱，相应地便可以考虑更多的算子的有界性并得到较弱条件的乘子定理。

Baernstein 和 Sawyer 利用由 Herz 引入的 K 空间，给出了一类 H^p 空间的嵌入定理，推广了 Taibleson-Weiss 的分子条件. 作为应用，他们证明了一些新的 H^p 空间乘子定理。他们的主要结果可叙述如下。

设 $1\leqslant a\leqslant\infty$，$0\leqslant \alpha<\infty$，$0<b\leqslant\infty$，记 $\dot{K}_a^{\alpha,b}$ 为所有满足下面条件的 $f\in L^a_{\rm loc}(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})$ 所组成的空间：

$$\|f\|_{\dot{K}_a^{\alpha,b}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\left(\int_{A_k}|f|^a\mathrm{d}x\right)^{b/a}2^{k\alpha b}\right\}^{1/b}<\infty,$$

其中 $A_k=\{x: 2^k\leqslant|x|<2^{k+1}\}$. 不难看出，当 $p\leqslant 1$ 时，

$$\|f\|_p\leqslant C\|f\|_{\dot{K}_1^{n(\frac{1}{p}-1),p}},$$

以及

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)||x|^{n(\frac{1}{p}-1)}\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{\dot{K}_1^{n(\frac{1}{p}-1),p}}.$$

因此，如果 f 满足消失矩条件 $\int_{\boldsymbol{R}^n}x^\beta f(x)\mathrm{d}x=0$，$0\leqslant|\beta|\leqslant N$，尽管 $f\in\dot{K}_1^{n(\frac{1}{p}-1),p}$ 不能保证 f 在 $\boldsymbol{R}^n$ 局部可积，但可以如下定义广

义函数

$$\langle\varphi,f\rangle=\int_{R^n}(\varphi-P_N\varphi)f,\quad 当\ N<n\left(\frac{1}{p}-1\right),$$

$$\langle\varphi,f\rangle=\int_{R^n}(\varphi-P_{N-1}\varphi)f,\quad 当N=n\left(\frac{1}{p}-1\right),$$

其中 $P_N\varphi$ 是 φ 的N阶 Taylor 多项式。

Taibleson–Weiss 的(p,q,N,ε)分子，实际上是 $\dot{K}_q^{a,p}\cap L^q$ 中的函数，其中$a>n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$，且满足消失矩条件。因为，当$a_1\leqslant a_2$时，

$$K_{a_2}^{a,b}=\dot{K}_{a_2}^{a,b}\cap L^{a_2}\subset K_{a_1}^{\gamma,b}=\dot{K}_{a_1}^{\gamma,b}\cap L^{a_1},$$

其中 $\gamma=a-n\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$，即得$(p,q,N,\varepsilon)$分子属于$\dot{K}_1^{a,p}$，$a>n\left(\frac{1}{p}-1\right)$.

设f满足消失矩条件，Baernstein–Sawyer 证明了下面的定理。

定理 (a) 若$N<n\left(\frac{1}{p}-1\right)$，则$\dot{K}_1^{n(\frac{1}{p}-1),p}\subset H^p$，且

$$\|f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{\dot{K}_1^{n(\frac{1}{p}-1),p}}.$$

(b) 若 $N=n\left(\frac{1}{p}-1\right)$，$p<1$，则 $Y(p)\subset H^p$，且$\|f\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{Y(p)}$，其中$Y(p)\subset\dot{K}_1^{n(\frac{1}{p}-1),p}\left(N=n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right)$由

$$\|f\|_{Y(p)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{A_k}|f|\,dx\right)^p(|k|+1)<\infty$$

定义。

(c) $Y^*\subset H^1$，且$\|f\|_{H^1}\leqslant C\|f\|_{Y^*}$，其中 Y^*由

$$\|f\|_{Y^*}=\int_{R^n}|f(x)|\left(1+\log^+|x|+\log^+\frac{|f(x)|}{\|f\|_1}\right)dx<\infty$$

定义。

他们用例子说明，上面的嵌入定理已是最好的可能了。他们还应用这一定理，得到下述的乘子定理。

定理 (a) 设 $0<p<1$，

$$M=\sup_\delta\|\check{m}_\delta\|_{\dot{K}_1^{n(\frac{1}{p}-1),p}}<\infty,$$

其中 $m_\delta(x)=m(\delta x)\eta(x)$，$\eta\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$，$\operatorname{supp}\eta\subset\left\{x:\frac{1}{4}\leqslant|x|\leqslant 4\right\}$，且当 $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 时 $\eta=1$，则 m 是 H^p 的Fourier乘子，且

$$\|(m\hat{f})^\vee\|_{H^p}\leqslant CM\|f\|_{H^p}.$$

(b) 若 $\check{f}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，

$$M=\sup_\delta\|\check{m}_\delta\|_{K(\omega)}<\infty,$$

其中 $K(\omega)$ 由

$$\|f\|_{K(\omega)}=\int_{|x|\leqslant 1}|f|\,dx+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{A_k}|f|\,dx\right)\omega(k)<\infty$$

定义，$\omega(k)$ 满足 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\omega(k)^{-2}<\infty$，则 m 是 H^1 的 Fourier 乘子，且

$$\|(m\hat{f})^\vee\|_{H^1}\leqslant CM\|f\|_{H^1}.$$

这些结果分别推广了 Calderón-Torchinsky，Hörmander以及 Taibleson-Weiss 的乘子定理。详情可见[BS]。

2. 由于分子依赖于空间的具体结构，例如依赖于多项式，因此尽管在许多一般空间上可以建立原子 H^p 空间理论，但却没有得到相应的分子结构。例如，在第11章我们将介绍乘积空间上的 H^p 空间。在其上能否建立分子理论，仍然是一个没有解决的问题。

第七章　BMO空间与H^p的对偶空间

有界平均振动空间 (Bounded Mean Oscillation) 通常简称为BMO，它是 John-Nirenberg 于 1961 年在研究偏微分方程时发现的。直到1972年，C. Fefferman 与 E.M. Stein 发现BMO是H^1的对偶空间后，它才引起人们的极大注意。十多年来，人们发现了BMO 的许多有趣的性质与十分重要的应用。过去许多无法准确刻画的性质，由于有了 BMO 空间，一下都变得十分清楚了。后面 § 10.2叙述的 $T(1)$定理，就是一个最典型的例子.在许多情况下，BMO 是 L^∞ 的更合适的替代。近年来，BMO 已与许多领域如单叶函数、拟保角变换、偏微分方程、概率论等产生了密切的联系。直到现在，BMO 仍然是分析的一个十分重要的研究对象。

在 § 7.1，我们叙述 BMO 的最基本的性质，证明 H^1 的对偶空间是 BMO，同时给出BMO与 Carleson 测度的关系。在 § 7.2，我们给出 H^p 对偶空间的刻画。值得指出的是，由于有了 H^p 空间($0<p\leqslant 1$)的原子分解，它的对偶空间的证明变得简单得多了。在以后几章，我们将继续深入地讨论本章的有关内容，特别是BMO 空间。

§ 7.1　BMO 空间

定义1.1　设 $f\in L_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，即 f 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的局部可积函数。如果

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-m_Q f|\,dx<\infty,$$

其中 Q 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的方体，$m_Q f = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x$，则称 f 是BMO函数。

记

$$\|f\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - m_Q f|\,\mathrm{d}x,$$

称为 f 的BMO范数。显然，$(\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n), \|\ \|_*)$ 构成一线性赋范空间。注意到常数的BMO范数为0，所以在这空间中，元素由等价类组成，相差为常数的函数是在同一个等价类中。

命题1.1 $f \in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$，当且仅当对任意方体 $Q \subset \boldsymbol{R}^n$，存在可依赖于 Q 的常数 C_Q，使得

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - C_Q|\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{1.1}$$

证明 我们只需证明一个方向的蕴含关系，因为另一方向的蕴含关系是显然的。

设(1.1)成立，则

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - m_Q f|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - C_Q|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{|Q|}\int_Q |C_Q - m_Q f|\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - C_Q f|\,\mathrm{d}x + \left|C_Q - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{|Q|}\int_Q |f(x) - C_Q|\,\mathrm{d}x,$$

故 $\|f\|_* < \infty$。

记

$$\|f\|'_* = \sup_Q \inf_C \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - C|\,\mathrm{d}x.$$

命题1.1说明，$\|f\|'_*$ 与$\|f\|_*$是等价范数．回忆空间 $L(\beta,q',s)$（见§5.2定义2.2)，BMO 可以看作 $\beta=0$，$q'=1$，$s=0$ 的 $L(\beta,q',s)$，即它是临界的 Campanato-Meyers 空间．

显然 $L^\infty\subset$BMO．但 $L^\infty\neq$BMO．

例1 $\log|x|\in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$．

我们只对 $n=1$ 的情形给出证明．推广到一般的 n 是一个容易的习题．

设 $I=[a,b]\subset\mathbf{R}^1$，不妨设 $-b<a<b$．这时

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)-\log b|\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b(\log b-\log|x|)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a}{b-a}[\log|a|-\log b]+1,$$

由于

$$\left|\frac{a}{b-a}(\log|a|-\log b)\right|\leqslant\frac{|a|}{b-|a|}\log\frac{b}{|a|}$$

$$=\frac{\log\left(1+\frac{b}{|a|}-1\right)}{\frac{b}{|a|}-1}\leqslant 1,$$

故$\|\log|x|\|'_*\leqslant 2$．

有意思的是，BMO 反映的是函数的整体性质．例如，读者可以验证，$\chi_{(0,\infty)}(x)\log|x|\notin \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^1)$，虽然 $\log|x|\in$BMO．

定理1.1 BMO 是完备的．

证明 设 f_n 是 BMO 的 Cauchy 列．这时 $f_n-m_Qf_n$ 是 $L(Q)$ 的 Cauchy 列，故存在 $f^Q(x)\in L(Q)$，使得

$$f_n-m_Qf_n\to f^Q\quad(L^1(Q)),$$

且满足

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f^Q(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sup_n\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_n(x)-m_Qf_n|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sup_n \|f_n\|_*. \tag{1.2}$$

对任意方体 $R \supset Q$，有

$$|m_Q f_n - m_R f_n| \leqslant \frac{1}{|Q|}\int_Q |f_n(x) - m_R f_n| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{|R|}{|Q|} \frac{1}{|R|}\int_R |f_n(x) - m_R f_n| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_{QR} \sup_n \|f_n\|_*.$$

这说明 $m_Q f_n - m_R f_n$ 是有界数列，故有收敛子序列 $m_Q f_{n_k} - m_R f_{n_k}$. 在等式

$$f_{n_k} - m_Q f_{n_k} = f_{n_k} - m_R f_{n_k} + (m_R f_{n_k} - m_Q f_{n_k})$$

两边令 $k \to \infty$ 取极限，便知 f^Q 与 f^R 在 Q 的限制只差一个常数. 这样，我们便知，存在函数 $f \in L_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，使得对任意 $Q \subset \boldsymbol{R}^n$，有

$$f^Q = f|_Q,$$

此等式是在模去常数的意义下成立. 因此，对任意 Q，有

$$f_n - m_Q f_n \to f - m_Q f \quad (L(Q)).$$

由(1.2)得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_n(x) - m_Q(f - f_n)| \mathrm{d}x \leqslant \sup_{m > n} \|f_m - f_n\|_*,$$

从而

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_n(x) - m_Q(f - f_n)| \mathrm{d}x \leqslant \sup_{m > n} \|f_m - f_n\|_*.$$

只要 n 充分大，不等式右边可任意小，即 $\|f - f_n\|_* \to 0$. 定理1.1得证.

BMO 与 L^∞ 相似，在范数意义下“好”函数不构成稠密子集. 但是，用有界函数在 L_{loc} 拓扑下去逼近 BMO 函数，却是容

易做到的，而这在许多情况下已经够用了。

引理1.1 设 $f\in$ BMO. 对任意 $N>0$，定义

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当} |f(x)|\leqslant N, \\ N\dfrac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{当} |f(x)|>N, \end{cases}$$

则 $\|f_N\|_*\leqslant C\|f\|_*$.

引理的证明是显然的，并且 f_N 还有下列性质：

(i) $\|f_N\|_\infty\leqslant N$；

(ii) 在 $L_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ 中，$f_N\to f$；

(iii) $|f_N-f|$ 单调趋向于 0.

下面给出 BMO 函数的一个重要性质，它刻画了 BMO 在局部的可能的增长速度。

定理1.2 (John-Nirenberg) 存在两个常数 $\lambda>0$ 与 $C>0$，使得对于任意 $f\in$ BMO$(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\exp\left\{\frac{\lambda}{\|f\|_*}|f(x)-m_Qf|\right\}dx\leqslant C. \tag{1.3}$$

证明 不妨假设 $f\in L^\infty$，这时，(1.3)左边对任意 $\lambda>0$ 有意义。我们最终将证明，存在 $\lambda>0$，使得(1.3)右边的常数与 $\|f\|_\infty$ 无关。利用引理1.1便可去掉 $f\in L^\infty$ 的假定。

记 Q_0 是一任意固定的方体，Q 是由 Q_0 不断把边二等分而得到的二进"网格方体"。全体 Q 组成的集合记为 $\Delta(Q_0)$。若 $Q,\tilde{Q}\in\Delta(Q_0)$，$Q\subset\tilde{Q}$，且 $l(Q)=\frac{1}{2}l(\tilde{Q})$，$l(Q)$ 表示 Q 的边长，则 $|m_Qf-m_{\tilde{Q}}f|\leqslant 2^n\|f\|_*$，这是由于

$$\begin{aligned}|m_Qf-m_{\tilde{Q}}f|&\leqslant m_Q|f-m_{\tilde{Q}}f|\leqslant 2^n m_{\tilde{Q}}|f-m_{\tilde{Q}}f|\\&\leqslant 2^n\|f\|_*.\end{aligned}$$

现在对函数 $(f-m_{Q_0}f)\chi_{Q_0}$ 以及 $\alpha=2\|f\|_*$ 作 Calderón-Zygmund 分解，得到 $Q_i\in\Delta(Q_j)$，满足

$$m_{Q_i}|(f-m_{Q_0}f)\chi_{Q_0}|>2\|f\|_*,$$

且当 $x\in\left(\bigcup_i Q_i\right)^c$ 时，

$$|(f(x)-m_{Q_0}f)\chi_{Q_0}(x)|\leqslant 2\|f\|_*,$$

还有

$$\left|\bigcup_i Q_i\right|\leqslant\frac{\|(f-m_{Q_0}f)\chi_{Q_0}\|_1}{2\|f\|_*}\leqslant\frac{|Q_0|}{2}.$$

因 Q_i 是具有上述性质的极大二进方体，有

$$m_{\tilde{Q}_i}|f-m_{Q_0}f|\leqslant 2\|f\|_*,$$

故

$$|m_{Q_i}f-m_{Q_0}f|\leqslant|m_{Q_i}f-m_{\tilde{Q}_i}f|+|m_{\tilde{Q}_i}f-m_{Q_0}f|$$

$$\leqslant(2^n+2)\|f\|_*.$$

令

$$A(\lambda)=\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\exp\left\{\frac{\lambda}{\|f\|_*}|f(x)-m_Qf|\right\}dx,$$

由 $f\in L^\infty$ 知 $A(\lambda)<\infty$。而

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\exp\left\{\frac{\lambda}{\|f\|_*}|f(x)-m_{Q_0}f|\right\}dx$$

$$\leqslant\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0\setminus\bigcup_i Q_i}e^{2\lambda}d\lambda$$

$$+\frac{1}{|Q_0|}\sum_i|Q_i|\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\exp\left\{\frac{\lambda}{\|f\|_*}|f(x)-m_{Q_i}f|\right\}$$

$$\times e^{(2^n+2)\lambda}dx$$

$$\leqslant e^{2\lambda}+e^{(2^n+2)\lambda}A(\lambda)\frac{1}{|Q_0|}\left|\bigcup_i Q_i\right|$$

$$\leqslant e^{2\lambda}+\frac{1}{2}e^{(2^n+2)\lambda}A(\lambda),$$

即

$$A(\lambda)\leqslant 2^{2\lambda}\left[1-\frac{1}{2}e^{(2^n+2)\lambda}\right],$$

取 λ 充分小，右边是一不依赖于 $\|f\|_*$ 的正数，这就是定理 1.2 所要求证明的。

推论1.1 存在常数 $\lambda>0, C>0$，对任意 $f\in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$ 与任意 $Q\subset\boldsymbol{R}^n, t>0$，有

$$|\{x\in Q:\ |f(x)-m_Qf|>t\|f\|_*\}|\leqslant Ce^{-\lambda t}|Q|.$$

证明 记

$$E_t=\{x\in Q:\ |f(x)-m_Qf|>t\|f\|_*\},$$

则

$$e^{\lambda t}|E_t|\leqslant\int_Q \exp\left\{\frac{\lambda}{\|f\|_*}|f(x)-m_Qf|\right\}dx\leqslant C|Q|,$$

即为所要证的结论。

事实上，推论 1.1 与定理 1.2 是等价的。下面我们从推论 1.1推导出定理 1.2。取 $\alpha=\frac{\lambda}{2}$，则

$$\int_Q \exp\left\{\frac{\alpha}{\|f\|_*}|f(x)-m_Qf|\right\}dx$$

$$=\int_0^\infty\left|\left\{x\in Q:\ \exp\left\{\frac{\alpha}{\|f\|_*}|f(x)-m_Qf|\right\}>t\right\}\right|dt$$

$$\leqslant\int_0^\infty\left|\left\{x\in Q:\ \frac{\alpha}{\|f\|_*}|f(x)-m_Qf|>\log t\right\}\right|dt$$

$$\leqslant|Q|+\int_1^\infty\left|\left\{x\in Q:\ |f(x)-m_Qf|>\frac{\|f\|_*}{\alpha}\log t\right\}\right|dt$$

$$\leqslant|Q|+\int_1^\infty C|Q|e^{-\lambda(\log t/\alpha)}dt$$

$$=|Q|+C|Q|\int_1^\infty t^{-\lambda/\alpha}dt=C|Q|,$$

其中最后的常数 C 与 f, Q 无关。

推论1.2 对 $1\leqslant p<\infty$，定义

$$\|f\|_{*p}=\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-m_Qf|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

则$\|f\|_{*p}$是 BMO 的等价模，即

$$\|f\|_*=\|f\|_{*1}\sim\|f\|_{*p},\quad 1<p<\infty.$$

证明 显然$\|f\|_*\leqslant\|f\|_{*p}$。现证反向不等式。

$$\begin{aligned}&\int_Q|f(x)-m_Qf|^p\mathrm{d}x\\&=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}|\{x\in Q:\ |f(x)-m_Qf|>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha\\&\leqslant p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mathrm{e}^{-\lambda\alpha/\|f\|_*}\mathrm{d}\alpha|Q|\\&\leqslant C\|f\|_*^p|Q|,\end{aligned}$$

故$\|f\|_{*p}\leqslant C\|f\|_*$。

下面的定理刻画了 BMO 函数总体上的大小。

定理1.3 设 $\varepsilon>0$。存在 $C(\varepsilon)>0$，使得对任意方体 Q_0 与 $f\in\mathrm{BMO}$，有

$$\int_{R^n}\frac{|f(x)-m_{Q_0}f|}{\delta^{n+\varepsilon}+|x-x_0|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{C(\varepsilon)}{\delta^\varepsilon}\|f\|_*,$$

其中 δ 是 Q_0 的边长，x_0 为 Q_0 的中心。

特别地，对 $\varepsilon=1$，记 $t=\delta$，我们得到

$$\int_{R^n}\frac{t|f(x)-m_{Q_0}f|}{t^{n+1}+|x-x_0|^{n+1}}\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_*.$$

由此可知，BMO 函数的 Poisson 积分是有界的。

证明 令 $Q_k=2^kQ_0$，即与 Q_0 同心，边长为 Q_0 的 2^k 倍的方体。这样

$$|m_{Q_{k+1}}f - m_{Q_k}f| \leqslant 2^n \|f\|_*,$$

从而

$$|m_{Q_k}f - m_{Q_0}f| \leqslant k2^n \|f\|_*.$$

记 $Q_{-1} = \varnothing$，于是

$$\int_{R^n} \frac{|f(x) - m_{Q_0}f|}{\delta^{n+\varepsilon} + |x - x_0|^{n+\varepsilon}} dx$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_k \setminus Q_{k-1}} \frac{|f(x) - m_{Q_0}f|}{\delta^{n+\varepsilon} + |x - x_0|^{n+\varepsilon}} dx$$

$$\leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} (2^k\delta)^{-\varepsilon} m_{Q_k} |f - m_{Q_0}f|$$

$$\leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 2^n (2^k\delta)^{-\varepsilon} \|f\|_*$$

$$\leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\delta^{\varepsilon}} \|f\|_*.$$

现在我们可以证明关于 H^1 的对偶空间的著名定理了.

定理1.4 (C.Fefferman-Stein)

$$(H^1)^* = \text{BMO}.$$

证明 首先证明 $\text{BMO} \subset (H^{1,\infty,0})^*$，即每个 $g \in \text{BMO}$ 都对应于 $H^{1,\infty,0}$ 的一个有界线性泛函. 事实上，设 a 是$(1,\infty,0)$原子，$\text{supp}a \subset Q$，则定义

$$L_g(a) = \int_{R^n} g(x)a(x)dx,$$

这时

$$|L_g(a)| = \left| \int_{R^n} (g(x) - m_Q g) a(x) dx \right|$$

$$\leqslant \|a\|_\infty \int_Q |g(x) - m_Q g| dx \leqslant \|g\|_*.$$

对任意 $f\in H^{1,\infty,0}$，这时 $f=\sum \lambda_j a_j$，a_j 是$(1,\infty,0)$原子，$\sum|\lambda_j|<\infty$，故

$$|L_g(f)|=\left|\sum\lambda_j L_g(a_j)\right|\leqslant\|g\|_*\sum|\lambda_j|,$$

这就证明了 $\mathrm{BMO}\subset(H^{1,\infty,0})^*$.

下面证明$(H^{1,2,0})^*\subset\mathrm{BMO}$，即对任意 $L\in(H^{1,2,0})^*$，都存在 $g\in\mathrm{BMO}$，使得对 $f\in H^{1,2,0}$，有

$$L(f)=\int_{R^n}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $Q\subset\boldsymbol{R}^n$ 是任意立方体. 考虑 $f\in L^2(Q)$，$\mathrm{supp}f\subset Q$ 且 $\int_{R^n}f(x)\mathrm{d}x=0$. 显然 $f\in H^{1,2,0}(\boldsymbol{R}^n)$，因为它是$(1,2,0)$原子的倍数. 并且

$$\|f\|_{H^{1,2,0}}\leqslant\|f\|_{L^2(Q)}|Q|^{1/2}.$$

由此得

$$|L(f)|\leqslant\|L\|\|f\|_{H^{1,2,0}}\leqslant\|L\||Q|^{1/2}\|f\|_{L^2(Q)}.$$

用 Hahn-Banach 定理知 L 可延拓为 $L^2(Q)$的有界线性泛函，从而由 Riesz 定理知存在 $g\in L^2(Q)$，使得

$$L(f)=\int_Q f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\|g\|_{L^2(Q)}\leqslant\|L\||Q|^{1/2},$$

并且 g 在差一个常数的意义下是唯一的. 用类似于证明定理 1.1 的方法，便可得函数 g，它定义在整个 $\boldsymbol{R}^n$，在每个方体 Q 与上面所得到的 g 是相同的（可差一常数）.我们要证明的是$g\in\mathrm{BMO}$. 事实上，对任意 $Q\subset\boldsymbol{R}^n$，$f\in L^2(Q)$，这时$(f-m_Qf)\chi_Q\in H^{1,2,0}$，并且

$$\|(f-m_Qf)\chi_Q\|_{H^{1,2,0}}\leqslant2\|f\|_{L^2(Q)}|Q|^{1/2}.$$

因此

$$\left|\int_Q (g(x)-m_Q g)f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_Q (f(x)-m_Q f)g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= |L((f-m_Q f)\chi_Q)| \leqslant 2\|L\|\|f\|_{L^2(Q)}|Q|^{1/2}.$$

对 $\|f\|_{L^2(Q)} \leqslant 1$ 取上确界，便得

$$\|(g-m_Q g)\chi_Q\|_2 \leqslant 2\|L\||Q|^{1/2},$$

即 $\|g\|_* \leqslant 2\|L\|$。

注意到 $H^1 = H^{1,\infty,0} = H^{1,2,0}$，便完成了定理1.4的证明。

下面的定理是§3.2定理2.4的对偶形式。

定理1.5 (C.Fefferman-Stein) 函数 b 属于BMO的充分必要条件是存在 $b_0, b_1, \cdots, b_n \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$b = b_0 + \sum_{j=1}^n R_j(b_j).$$

证明 充分性 根据§6.2定理2.2后面的说明，Riesz变换是 H^1 到 L^1 有界的。因此它的对偶算子是 L^∞ 到BMO有界的。但Riesz算子是卷积算子，其对偶算子本质上是它自身。故只要 $b_j \in L^\infty (j=0,1,\cdots,n)$，则 $b_0 + \sum_{j=1}^n R_j(b_j) \in \mathrm{BMO}$。

必要性 考虑空间

$$B = \{(f_0, f_1, \cdots, f_n):\ f_j \in L^1(\boldsymbol{R}^n), j=0,1,\cdots,n\}.$$

定义范数

$$\|(f_0, f_1, \cdots, f_n)\|_B = \sum_{j=0}^n \|f_j\|_1.$$

记

$$S = \{(f_0, f_1, \cdots, f_n) \in B:\ f_j = R_j(f_0)\},$$

它显然是 B 的闭子空间，并且 $f_0 \to (f_0, R_1(f_0), \cdots, R_n(f_0))$ 是 H^1 到 S 的保范映射。因此，H^1 的连续线性泛函等同于 S 的连续线性泛函。已知 $L^1 \oplus \cdots \oplus L^1$ 的对偶空间为 $L^\infty \oplus \cdots \oplus L^\infty$。对任意 $b \in$ BMO，由定理1.4知，它定义 H^1 从而也是 S 的连续线性泛函 l，

故存在$\tilde{b}_j \in L^\infty, j=0,1,\cdots,n$,使得

$$l(f)=\int_{R^n} b(x)f_0(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}\tilde{b}_0(x)f_0(x)\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}\int_{R^n}\tilde{b}_j(x)R_j(f_0)(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}\tilde{b}_0(x)f_0(x)\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{n}\int_{R^n}R_j(\tilde{b}_j)(x)f_0(x)\mathrm{d}x,$$

从而

$$b=\tilde{b}_0-\sum_{j=1}^{n}R_j(\tilde{b}_j).$$

记$b_0=\tilde{b}_0$, $b_j=-\tilde{b}_j$, 即得所要证的结果。

BMO 与 Carleson 测度还有十分密切的关系。Carleson 测度是 Carleson 于 60 年代初研究 Corona 问题时引进来的，由于它同 BMO 有紧密的联系，现在已成了调和分析的重要工具。Carleson 当时提出如下的问题：对于 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的什么样的非负测度 μ，使不等式

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}}|P_t*f(y)|^2\mathrm{d}\mu(y,t)\leqslant C\|f\|_2^2 \qquad (1.4)$$

对一切 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 成立？其中 P_t 是 Poisson 核，C 与 f 无关。当然，Carleson 最初是对 $n=1$ 的情形提出的。

先看必要条件。对 $\boldsymbol{R}^n$ 的任意方体 Q，定义

$$\hat{Q}=\{(y,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ y\in Q, 0<t<l(Q)\}.$$

取 $f=\chi_{2Q}$。注意，当$(y,t)\in\hat{Q}$时，$(P_t*\chi_{2Q})(y)\geqslant C>0$。把这代入(1.4)，得到

$$C^2\mu(\hat{Q})\leqslant\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}}|P_t*\chi_{2Q}(y)|^2\mathrm{d}\mu(y,t)\leqslant C|Q|,$$

即

$$\mu(\hat{Q})\leqslant C|Q|.$$

我们有下面的定义：

定义1.2 R_+^{n+1} 上的非负测度 μ 称为 Carleson 测度，如果

$$\mu(\hat{Q})\leqslant C|Q|$$

对一切 Q 成立，C 与 Q 无关。并称满足上述不等式的最小常数 C 为 μ 的 Carleson 测度的范数，记作 $\|\mu\|_C$。

下面证明，只要 μ 是 Carleson 测度，则(1.4)成立。我们给出更一般的形式。

定理1.6 (Carleson 不等式) 若 f 在 R_+^{n+1} 连续，μ 是 R_+^{n+1} 的 Carleson 测度，则

$$\int_{R_+^{n+1}}|f(y,t)|\mathrm{d}\mu(y,t)\leqslant C\int_{R^n}f^*(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$f^*(x)=\sup_{|y-x|<t}|f(y,t)|,$$

C 仅依赖于 μ 的 Carleson 范数。

证明 记

$$E_\lambda=\{(y,t)\in R_+^{n+1}:\ |f(y,t)|>\lambda\},$$

$$E_\lambda^*=\{x\in R^n:\ f^*(x)>\lambda\}.$$

只要证明 $\mu(E_\lambda)\leqslant C|E_\lambda^*|$ 就足够了，因为

$$\int_{R_+^{n+1}}|f(y,t)|\mathrm{d}\mu(y,t)=\int_0^\infty\mu(E_\lambda)\mathrm{d}\lambda\leqslant C\int_0^\infty|E_\lambda^*|\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant C\|f^*\|_1.$$

显然，E_λ 是开集，由 Whitney 分解 $E_\lambda^*=\bigcup\limits_j Q_j$，$Q_j$ 是二进方体。对任意 $(y,t)\in E_\lambda$，即 $f(y,t)>\lambda$。这时，对集合 $\{x\in R^n:|x-y|<t\}$ 中的每个 x，显然都有 $f^*(x)\geqslant f(y,t)>\lambda$。而由 Whitney 分解的构造知，存在某个 Q_j，使 $\{x\in R^n:\ |x-y|<t\}\subset CQ_j$，其中 C 是绝对常数。因此

$$E_\lambda \subset \bigcup_j \widehat{CQ_j},$$

故

$$\mu(E_\lambda) \leqslant \sum_j \mu(\widehat{CQ_j}) \leqslant C \sum |Q_j| = C|E_\lambda^*|.$$

推论1.3 设 $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, μ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的 Carleson 测度， $1 < p < \infty$，则

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}} |P_t * f(y)|^p \mathrm{d}\mu(y,t) \leqslant C\|f\|_p^p,$$

其中 P_t 是 Poisson 核。

证明 令 $F(y,t) = |P_t * f(y)|^p$。由恒等逼近的极大函数被 Hardy-Littlewood 极大函数控制，知存在 $C>0$ 使得 $F^*(x) \leqslant CM(f)(x)^p$。由定理 1.6 便得

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}} |P_t * f(y)|^p \mathrm{d}\mu(y,t) \leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n} F^*(y)^p \mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n} M^p(f)(y)\mathrm{d}y \leqslant C\|f\|_p^p.$$

BMO 函数与 Carleson 测度有密切的关系。

定理 1.7 设 $b \in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$, $\psi \in \mathscr{S}$ 是径向函数，$\int_{\boldsymbol{R}^n} \psi(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $|\psi_t * b(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的 Carleson 测度，其中 $\psi_t(\cdot) = \frac{1}{t^n}\psi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$.

证明 首先，我们知道

$$\iint_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}} |\psi_t * f(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} \leqslant C\|f\|_2^2,$$

其中 C 与 f 无关。这是因为用 Plancherel 定理，再注意到 $\hat{\psi}(\xi)$ 绝

对连续且 $\hat{\psi}(0)=\int\psi(x)\mathrm{d}x=0$，便有

$$\iint_{R_+^{n+1}}|\psi_t*f(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}=\int_0^\infty\int_{R^n}|\hat{\psi}(\xi t)\hat{f}(\xi)|^2\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\int_{R^n}\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(\xi t)|^2}{t}\mathrm{d}t|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$=C\|\hat{f}\|_2^2=C\|f\|_2^2,$$

其中

$$C=\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{t}\mathrm{d}t.$$

现在对 R^n 的任意方体 Q. 不妨设 Q 是 R^n 中以原点为中心的单位方体,否则只要作平移与展缩就可以了. 不妨设 $m_{2Q}b=0$，不然，则只要用 $b-m_{2Q}b$ 代替 b，因为由 $\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$ 知，$\psi_t*b=\psi_t*(b-m_{2Q}b)$. 令 $b_1=b\chi_{2Q}$，$b_2=b-b_1$. 这时

$$\iint_{\hat{Q}}|\psi_t*b_1(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\int_{2Q}b^2(x)\mathrm{d}x\leqslant C\|b\|_*^2,$$

而

$$|\psi_t*b_2(x)|\leqslant\int_{R^n\setminus 2Q}\frac{1}{t^n}\left|\psi\left(\frac{x-z}{t}\right)\right||b(z)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant C\int_{R^n\setminus 2Q}\frac{t|b(z)|}{t^{n+1}+|x-z|^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

当 $z\in(2Q)^C$，$x\in Q$ 时，$t^{n+1}+|x-z|^{n+1}\geqslant C|z|^{n+1}\geqslant C$，故用定理1.3，有

$$|\psi_t*b_2(x)|\leqslant C\int_{R^n}\frac{t|b(z)|}{1+|z|^{n+1}}\mathrm{d}z\leqslant Ct\|b\|_*,$$

于是

$$\iint_{\hat{Q}} |\psi_t * b_2(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} \leqslant C \iint_{\hat{Q}} t\|b\|_*^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\|b\|_*^2.$$

综合起来便得

$$\iint_{\hat{Q}} |\psi_t * b(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} \leqslant C\|b\|_*^2 = C\|b\|_*^2 |Q|,$$

这就证明了定理1.7.

值得指出的是，如果代替$\hat{Q}$的定义，采取

$$\hat{Q} = \{(y,t) | \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ y \in Q, B_t(y) \subset Q\},$$

其中 $B_t(y)$表示以 y 为中心，t 为半径的球，则上面的所有讨论保持正确。这时，我们称 $\hat{Q}$为Q的帐篷。另外，如果我们用球B代替方体Q，上面的所有讨论也仍然成立。

定理1.6的Carleson不等式有一种推广的形式。对定义在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$的$f(y,t)$，$g(y,t)$，令

$$A_q(f)(x) = \left(\int_{\Gamma(x)} |f(y,t)|^q \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/q}, \quad 当\ q<\infty,$$

$$A_\infty(f)(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma(x)} |f(y,t)|$$

以及

$$C_q(g)(x) = \sup_{B:\,x\in B} \left(\frac{1}{|B|}\int_{\hat{B}} |g(y,t)|^q \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}, \quad 当 q<\infty,$$

其中 $\Gamma(x)$表示以 x 为顶点的锥：$\{(y,t) \mid |x-y|<t\}$.

定理1.8 若$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，$1<q\leqslant\infty$，则

$$\iint_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}} |f(y,t)g(y,t)| \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t} \leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n} A_q(f)(x) C_{q'}(g)(x)\mathrm{d}x,$$

其中 C 与 f,g 无关.

特别地，当 $q=\infty, q'=1$ 且 $C_{q'}(g)(x)\in L^\infty$ 即 $|g(y,t)|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}$

是 Carleson 测度时，上式化为

$$\iint_{R_+^{n+1}}|f(y,t)g(y,t)|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\int_{R^n}A_\infty(f)(x)\mathrm{d}x,$$

这就是定理1.6的 Carleson 不等式。

证明 定义截锥

$$\Gamma^h(x)=\{(y,t)\,|\,|y-x|<t,\ 0<t\leqslant h\}$$

以及

$$A_{q'}(g|h)(x)=\left(\int_{\Gamma^{h}(x)}|g(y,t)|^{q'}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/q'}.$$

注意 $A_{q'}(g|h)(x)$ 对 h 单调上升，且 $A_{q'}(g|\infty)(x)=A_{q'}(g)(x)$。对每个 g，定义“停时” $h(x)$ 如下：

$$h(x)=\sup\{h: A_{q'}(g|h)(x)\leqslant MC_{q'}(g)(x)\},\qquad(1.5)$$

其中M是我们即将决定的充分大的常数，仅依赖于维数 n。关键是要证明，存在常数 $C=C_M$，使得当B是半径为 r 的球时，

$$|\{x\in B|h(x)\geqslant r\}|\geqslant Cr^n.\qquad(1.6)$$

假如此式已经成立，那末对任意 $\Phi(y,t)\geqslant0$，有

$$\iint_{R_+^{n+1}}\Phi(y,t)t^n\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant C^{-1}\int_{R^n}\int_{\Gamma^{h(x)}(x)}\Phi(y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

因为上式右边可以写成

$$C^{-1}\int_{R^n}\int_0^\infty\Phi(y,t)\int_{R^n}\chi(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,$$

其中 $\chi(x,y,t)$ 是集合 $\{(x,y,t)|(y,t)\in R_+^{n+1},\ |x-y|<t,\ t<h(x)\}$的特征函数，应用(1.6)知

$$\int_{R^n}\chi(x,y,t)\mathrm{d}x\geqslant Ct^n.$$

取 $\Phi(y,t)=|f(y,t)g(y,t)|t^{-n-1}$，用 Hölder 不等式，并注意到 $h(x)$的定义(1.5)，便有

$$\iint_{R_+^{n+1}} |f(y,t)g(y,t)| \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C^{-1}\int_{R^n}\int_{\Gamma^{h(x)}(x)} |f(y,t)g(y,t)| \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C^{-1}\int_{R^n} A_q(f|h)(x)A_{q'}(g|h)(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C^{-1}M\int_{R^n} A_q(f)(x)C_{q'}(g)(x)\mathrm{d}x,$$

这就是定理所要求的结论。

现在回过头来证明（1.6）。设B是任意半径为r的球，$\tilde{B}=3B$。这时

$$\frac{1}{|B|}\int_B A_{q'}(g|r)^{q'}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{|B|}\int_{R^n}\int_0^\infty |g(y,t)|^{q'}\int_{R^n}\chi(x,y,t)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}},$$

其中$\chi(x,y,t)$是$\{(x,y,t)|x\in B,\ |y-x|<t,\ 0<t\leq r\}$的特征函数。因此

$$\frac{1}{|B|}\int_B A_{q'}(g|r)^{q'}(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{a_n}{|\tilde{B}|}\int_{\hat{B}}|g(y,t)|^{q'}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t},$$

而根据$C_{q'}(g)$的定义，右边被$a_n\inf\limits_{x\in B} C_{q'}(g)^{q'}(x)$控制。另一方面

$$\frac{1}{|B|}\int_B A_{q'}(g|r)^{q'}(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{|B|}\int_{\{x\in B:\ h(x)<r\}} A_{q'}(g|h)^{q'}(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{|B|}\int_{\{x\in B:\ h(x)<r\}} M^{q'}C_{q'}(g)^{q'}(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{|B|}M^{q'}|\{x\in B;\ h(x)\leqslant r\}|\inf_{x\in B} C_{q'}(g)^{q'}(x),$$

这样，我们便得到

$$\frac{1}{|B|}M^{q'}|\{x\in B:\ h(x)\leqslant r\}|\leqslant a_n.$$

取M充分大，使$\frac{a_n}{M^{q'}}<\frac{1}{2}$，便可得到

$$|\{x\in B:\ h(x)\geqslant r\}|\geqslant\frac{1}{2}|B|,$$

这就是(1.6)。于是完成了定理1.8的证明。

利用定理1.8可以给出$(H^1)^*=\mathrm{BMO}$ 的另一个证明。事实上，取$\psi\in\mathscr{D}$为径向函数，$\mathrm{supp}\psi\subset\{|x|\leqslant1\}$，$\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，且

$$\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{t}\mathrm{d}t=1.$$

这时若$b\in\mathrm{BMO}$，则$|\psi_t*b(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$是Carleson测度，而$A_2(f)(x)=S(f)(x)$，即$f$的$S$函数。对任意$f\in H^1$，对$q=q'=2$用定理1.8，便有

$$\begin{aligned}\int_{R^n}f(x)b(x)\mathrm{d}x&=\iint_{R_+^{n+1}}(\psi_t*f(x))(\psi_t*b(x))\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\\&\leqslant C\int_{R^n}S(f)(x)C_2(\psi_t*b)(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant C\|b\|_*\int_{R^n}S(f)(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant C\|b\|_*\|f\|_{H^1},\end{aligned}$$

即b是H^1的有界线性泛函。

假设已知对偶结果$(H^1)^*=\mathrm{BMO}$，则利用定理1.8还可以给出定理1.7的逆。

定理1.9 设$\psi\in\mathscr{S}$，$\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，且对任意$\xi\in \boldsymbol{R}^n$，有

$$\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(\xi t)|^2}{t}\mathrm{d}t=C\neq 0,$$

（当ψ为径向函数时，这条件显然满足）。若$b\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，$|\psi_t*b|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$是$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$的 Carleson 测度，则$b\in \mathrm{BMO}$。

证明 对任意$f\in H^1$，对$q=q'=2$用定理1.8，有

$$\int_{R^n}f(x)b(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{C}\iint_{R_+^{n+1}}(\psi_t*f(x))(\psi_t*b(x))\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C'\int_{R^n}S(f)(x)\mathrm{d}x\leqslant C'\|f\|_{H^1},$$

即$b\in(H^1)^*$，从而$b\in\mathrm{BMO}$。

§7.2 H^p空间的对偶$(0<p<1)$

定理2.1

$$(H^{p,q,s})^*=L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right),$$

其中$0<p<1\leqslant q<\infty$，s是不小于$\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$的整数，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$。

证明 设$g\in L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right)$，则对任意$f\in H^{p,q,s}$，即$f=\sum\lambda_ja_j$，其中$a_j$是$(p,q,s)$原子，$\mathrm{supp}a_j\subset Q_j$，$\sum|\lambda_j|^p<\infty$，有

$$\left|\int_{R^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum|\lambda_j|\left|\int_{Q_j}a_j(x)g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \sum |\lambda_j| \left| \int_{Q_j} a_j(x) [g(x) - P_{Q_j}(g)(x)] \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \sum |\lambda_j| \|a_j\|_q \left(\int_{Q_j} |g(x) - P_{Q_j}(g)(x)|^{q'} \mathrm{d}x \right)^{1/q'}$$

$$\leqslant \sum |\lambda_j| \|g\|_{L(1/p-1,q',s)}$$

$$\leqslant \left(\sum |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L(1/p-1,q',s)}$$

$$\leqslant \|f\|_{H^{p,q,s}} \|g\|_{L(1/p-1,q',s)},$$

即 g 生成 $H^{p,q,s}$ 的一个连续线性泛函，且泛函的范数不超过 $\|g\|_{L(1/p-1,q',s)}$。

反过来，设 L 是 $H^{p,q,s}$ 的连续线性泛函，我们要证明存在 $g \in L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right)$，使得 L 是由 g 生成的。根据 $H^{p,q,s}=H^{p,2,s}$，L 也是 $H^{p,2,s}$ 的连续线性泛函，它的范数用 $\|L\|'$ 表示。

设 Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的任意方体。令

$$L_s^2(Q) = \{ f \in L^2(Q): \operatorname{supp} f \subset Q,$$

$$\text{且} \int_{\boldsymbol{R}^n} x^\alpha f(x) \mathrm{d}x = 0, \text{ 当 } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant s \}.$$

对任意 $f \in L_s^2(Q)$，显然 $a(x) = |Q|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|f\|_2^{-1} f(x)$ 是 $(p,2,s)$ 原子，从而

$$|L(a)| \leqslant \|L\|' \|a\|_{H^{p,2,s}} \leqslant \|L\|',$$

于是

$$|L(f)| \leqslant \|L\|' \|f\|_2 |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

用 Hahn-Banach 定理，L 可扩张为 $L^2(Q)$ 的连续线性泛函，且保持范数不变，即对任意 $f \in L^2(Q)$，有

$$|L(f)| \leqslant \|L\|' \|f\|_2 |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

根据 Riesz 表示定理，存在 $g\in L^2(Q)$，使得

$$L(f)=\int_Q f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

对一切 $f\in L^2(Q)$ 成立，其中 g 在相差一次数不超过 s 的多项式的意义下是唯一确定的。类似于在定理1.1的证明所用的方法，可以得到定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数 g。事实上，令 $Q_j=\{x\in\boldsymbol{R}^n: |x_i|\leqslant j,\ i=1,2,\cdots,n\}$。我们已知存在 $\tilde{g}_j\in L^2(Q_j)$，使得

$$L(f)=\int_{Q_j} f(x)\tilde{g}_j(x)\mathrm{d}x$$

对任意 $f\in L^2(Q_j)$ 成立，特别地对任意 $f\in L^2_s(Q_j)$ 成立。

对 $x\in Q_1$，我们有 $\tilde{g}_j(x)-\tilde{g}_1(x)=P_j(x)$，$P_j\in\mathscr{P}^s_{Q_j}$。这是因为 $\mathrm{supp}f\subset Q_j$，$\tilde{g}_j$ 在 Q_1 也表出 L，再由唯一性便得 $\tilde{g}_j(x)-\tilde{g}_1(x)=P_j(x)$。现令 $g_j=\tilde{g}_j-P_j$，当 $x\in Q_j$。注意到 P_j 最初是在 Q_1 上定义的，但由于它是多项式，故它自动地便在 Q_j 上被定义了。

若 $j<k$，对任意 $f\in L^2_s(Q_j)$，由于

$$g_j-g_k=(\tilde{g}_j-P_j)-(\tilde{g}_k-P_k),$$

则

$$\int_{Q_j} f(g_j-g_k)\mathrm{d}x=\int_{Q_j}[f(\tilde{g}_j-P_j)-f(\tilde{g}_k-P_k)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{Q_j}[f\tilde{g}_j-f\tilde{g}_k]\mathrm{d}x=\int_{Q_j} f\tilde{g}_j\mathrm{d}x-\int_{Q_j} f\tilde{g}_k\mathrm{d}x=0,$$

故存在多项式 $p\in\mathscr{P}^s_{Q_j}$，使得

$$g_j(x)-g_k(x)=p(x),\qquad \text{当}|x|<j.$$

特别地

$$[\tilde{g}_j(x)-P_j(x)]-[\tilde{g}_k(x)-P_k(x)]=p(x),\qquad \text{当}|x|<1.$$

但已知在 Q_1 上，$\tilde{g}_j-P_j=\tilde{g}_1=\tilde{g}_k-P_k$，故在 Q_1 有 $p(x)=0$。根据 p 是多项式，知 $p(x)\equiv 0$。于是我们得到当 $|x|<j$ 时，$g_j(x)$

$=g_k(x)$。定义

$$g(x)=g_j(x),\qquad \text{当}|x|<j,$$

我们便得到了 $\boldsymbol{R}^n$的函数 g。

剩下来要证明的是 $g\in L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right)$。设 a 是一个支集为 Q 的 (p,q,s) 原子，则

$$\|L\|\geqslant\|L(a)\|=\left|\int_Q g(x)a(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_Q a(x)[g(x)-P_Q(g)(x)]\mathrm{d}x\right|.$$

一般地，只要 $f\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$\mathrm{supp}f\subset Q$ 且$\|f\|_q=1$，则存在常数A，使得 $a(x)=A[f(x)-P_Q(f)(x)]$ 是 (p,q,s) 原子。事实上，只需取 $A=C|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$即可。于是

$$\|L\|\geqslant\|L(a)\|$$

$$=C\left|\int_Q|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}[f(x)-P_Q(f)(x)][g(x)-P_Q(g)(x)]\mathrm{d}x\right|$$

$$=C|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left|\int_Q f(x)[g(x)-P_Q(g)(x)]\mathrm{d}x\right|.$$

对 $f\in L^\infty$，$\|f\|_q=1$，$\mathrm{supp}f\subset Q$ 取上确界，有

$$\left(\int_Q|g(x)-P_Q(g)(x)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\leqslant C\|L\||Q|^{1/p-1/q}$$

$$=C\|L\||Q|^{1/p-1}|Q|^{1/q'},$$

从而

$$\|g\|_{L(1/p-1,q',s)}\leqslant C\|L\|,$$

定理2.1得证。

下面我们证明，Campanato-Meyers 空间 $L(\beta,q,s)$ 实际上是 Lipschitz 空间 $\Lambda_{n\beta}$，其中 $s=[n\beta]$，$1\leqslant q\leqslant\infty$。

引理2.1 若 $f\in L(\beta,q,s)$，其中 $\beta>0$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，$s=[n\beta]$，

则 f 几乎处处等于一连续函数。

证明 显然，只要对 $0<\beta<\frac{1}{n}$，$q=1$ 证明结论就足够了。对任意 $x\in \boldsymbol{R}^n$，设 Q_x是以 x 为中心的单位立方体。定义 $f_k(x)=m_{2^{-k}Q_x}f$，它是 $\boldsymbol{R}^n$上的连续函数。并且它是 $\boldsymbol{R}^n$上连续函数空间的 Cauchy 列，这是因为

$$\begin{aligned}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|&=|m_{2^{-k-1}Q_x}f-m_{2^{-k}Q_x}f|\\&\leqslant 2^n m_{2^{-k}Q_x}|f-m_{2^{-k}Q_x}f|\\&\leqslant 2^n\|f\|_{L(\beta,q,s)}|2^{-k}Q|^{\beta}\\&\leqslant C\|f\|_{L(\beta,q,s)}2^{-kn\beta}.\end{aligned}$$

因此 $f_k(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$收敛到一连续函数 $g(x)$.由 Lebesgue 微分定理知 $f_k(x)$ 几乎处处收敛到 f。这就证明了 f 等价于一连续函数。

记 $\tau_h f(x)=f(x-h),\Delta_h f(x)=(1-\tau_h)f(x)=f(x)-f(x-h)$，$\Delta_h^{k+1}f(x)=\Delta_h\Delta_h^k f(x)$。$\alpha$ 为 $\boldsymbol{Z}^n$ 的多重指标。记 $0=(0,\cdots,0)$，$0^0=1,\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha_1}{k_1}\cdots\binom{\alpha_n}{k_n}$.

引理2.2 若 $\varphi(x)$ 满足

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)x^{\alpha}\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & \text{当 } \alpha=0,\\ 0, & \text{当 } 0<|\alpha|\leqslant s,\end{cases}$$

σ 是 $\boldsymbol{R}^n$单位球面的向量：$|\sigma|=1$，则

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\Delta_{\sigma}^{s+1}\varphi(x)\cdot x^{\alpha}\mathrm{d}x=0,\qquad \text{当 } 0\leqslant|\alpha|\leqslant s.$$

证明 因 $(x+h)^{\alpha}=\sum\limits_{k+l=\alpha}\binom{\alpha}{k}x^k h^l$，故当 $0\leqslant|\alpha|\leqslant s$ 时，有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\tau_h\varphi(x)\cdot x^{\alpha}\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)(x+h)^{\alpha}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k+l=\alpha} \binom{\alpha}{k} h^l \int_{R^n} \varphi(x) x^k \mathrm{d}x$$

$$= h^\alpha.$$

注意到

$$\Delta_\sigma^{s+1} = (1-\tau_\sigma)^{s+1} = \sum_{l=0}^{s+1} \binom{s+1}{l} (-1)^l \tau_{l\sigma},$$

便得

$$\int_{R^n} \Delta_\sigma^{s+1} \varphi(x) \cdot x^\alpha \mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{k+1} \binom{s+1}{l} (-1)^l \int_{R^n} \tau_{l\sigma} \varphi(x) \cdot x^\alpha \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{l=0}^{s+1} \binom{k+1}{l} (-1)^l l^{|\alpha|} \sigma^\alpha = 0,$$

只要 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant s$. 最后一步可以这样看，对 $(1-\mathrm{e}^{\sigma \cdot x})^{k+1}$ 求导数 $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$，然后在 $x=0$ 取值，便得所求。

引理 2.3 若 $s \geqslant \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$，$p<1$，$h \in \boldsymbol{R}^n$，则

$$\Delta_h^{s+1} \delta \in H^{p,\infty,s},$$

且

$$\|\Delta_h^{s+1} \delta\|_{H^{p,\infty,s}} \leqslant C|h|^{n(1/p-1)},$$

其中 δ 是 Dirac 函数，C 与 h 无关。

证明 只要对任意 $|\sigma|=1$，证明 $\Delta_\sigma^{s+1}\delta \in H^{p,\infty,s}(\boldsymbol{R}^n)$，且其 $H^{p,\infty,s}$ 范数与 σ 无关，就足够了. 取 φ 满足引理2.2的条件，并且 $\mathrm{supp}\varphi \subset \{|x| \leqslant 1\}$. 记 $\varphi_\nu(x) = 2^{n\nu}\varphi(2^\nu x)$，则

$$\Delta_\sigma^{s+1}\delta = \Delta_\sigma^{s+1}\varphi_0 + \sum_{l=0}^{s+1} (-1)^l \binom{k+1}{l} \sum_{\nu=1}^{\infty} \tau_{l\sigma}(\varphi_\nu - \varphi_{\nu-1}). \tag{2.1}$$

右边的级数作为测度显然是收敛的，且它的项支于 $\{|x| \leqslant s+2\}$. 由引理2.1，$L\left(\frac{1}{p}-1, q, \left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$ 的元素是连续函数，因此，

(2.1)中的级数，作为 $L\left(\frac{1}{p}-1,\infty,\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]\right)$ 的线性泛函是收敛的。

从引理2.2知 $\Delta_\sigma^{s+1}\varphi_0=\lambda_0 a_0$，其中 a_0是 (p,∞,s) 原子，$|\lambda_0|\leqslant C'$。再加上简单的计算，便得 $\tau_{l\sigma}(\varphi_\nu-\varphi_{\nu-1})=\lambda_{l\nu}a_{l\nu}$，其中 $a_{l\nu}$是中心在 $l\sigma$ 的 (p,∞,s) 原子，而$|\lambda_{l\nu}|\leqslant C'2^{\nu n/(1-1/p)}$，$C'$ 与 σ 无关。引理2.3得证。

定理2.2　若 $g\in L(\beta,q,s)$，$\beta>0$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，$s\geqslant[n\beta]$，则 g 等价于一 Lipschitz $\Lambda_{n\beta}$中的函数，即存在 $C>0$，与 g 及 $h\in R^n$ 无关，使得

$$|\Delta_h^{s+1}g(x)|\leqslant C\|g\|_{L(\beta,q,s)}|h|^{n\beta}.$$

证明　记 $\beta=\frac{1}{p}-1$，$0<p<1$，则 $g\in L\left(\frac{1}{p}-1,1,s\right)$，且 $\|g\|_{L(1/p-1,1,s)}\leqslant\|g\|_{L(1/p-1,q,s)}$。由于$L\left(\frac{1}{p}-1,1,s\right)=(H^{p,\infty,s})^*$，故对任意 $f\in H^{p,\infty,s}$，有

$$|\langle f,g\rangle|\leqslant C\|f\|_{H^{p,\infty,s}}\|g\|_{L(\beta,q,s)}.$$

注意到$\Delta_h^{s+1}g(x)=(g*\Delta_h^{s+1}\delta)(x)$，应用引理2.3，便证得定理2.2。

§7.3　注释与进一步的结果

注释

有界平均振动空间（BMO）是 John-Nirenberg 于1961年发现的(参见[JN]),定理1.2属于他们.这里所采用的是 J.-L.Journé 的证明（参见[Jou 1]）。定理1.3，1.4与1.5，都属于 Fefferman-Stein[FS 2]。对偶定理1.4的证明,采用了原子分解，属于 R.Coifman。

Carleson 测度与定理1.6，最早见于 Carleson 1962 年的文章

[Car 1]，也可参看[Hö 2]. BMO 与 Carleson 测度的关系，最早见于[FS 2]，在那里，这是证明 $(H^1)^* = \mathrm{BMO}$ 的关键。定理1.8是邓东皋首先发现并加以证明的[De 2]，这里采用的是 Coifman-Meyer-Stein 的较简单的证明（参见[CMS 2]）。

H^p的对偶空间是某种 Lipschitz 空间，在一维的情形，首先由 Duren-Romberg-Shields 得到[DRS]. 高维的结果属于T. Walsh [Wa]. 首先用原子分解的方法证明这结果的是 Coifman-Weiss(参见[CW 2])。定理2.2的证明参见[TW]。

进一步的结果

1. Carleson 于1976年给出了 BMO 函数的一个分解定理. 设 $h(x)\in C^1(R^n)$ 为偶函数，且

$$|h(x)| + |\nabla h(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-(n+1)}, \qquad \int_{R^n} h(x)\mathrm{d}x = 1.$$

若 $\varphi\in\mathrm{BMO}$ 且具有紧支集，则存在函数列$\{b_j\}$与$\{t_j(y)\}$以及仅依赖于维数 n 的常数 B，使得

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|b_j\|_\infty \leqslant B\|\varphi\|_*$$

并且

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{R^n} h_{t_j(y)}(x-y)b_j(y)\mathrm{d}y + b_0(x) + \mathrm{const}.$$

反之，任何一个这种类型的函数 φ 都属于BMO，且

$$\|\varphi\|_* \leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}\|b_j\|_\infty.$$

作为这定理的直接应用，他得到了 H^1的极大函数刻画的另一个证明（参见[Car 3]）。

Uchiyama 将此定理作了进一步的推广，见[U 3]。

2. 利用上述结论 1 的 Carleson 分解定理，Coifman-Rochberg 通过引入 BLO 函数而得到 BMO 函数的另一种类型的分解.

我们称函数 $b\in$ BLO(下有界振动函数，bounded lower oscillation)，如果存在常数 C，使得对于任何方体 Q，有

$$m_Q(b)-\inf_Q b\leqslant C.$$

显然，BLO $\subsetneq$ BMO，同时BLO函数并不构成一个向量空间，因为 $b_1,b_2\in$ BLO，并不能保证 $b_1-b_2\in$ BLO。但是利用BLO 可以得到BMO 的一种分解。记 L^+ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上所有局部可积函数且其 Hardy-Littlewood 极大函数几乎处处有限所组成的集合。设 $g,h\in L^+$，α，$\beta>0$，$b\in L^\infty$，则

$$f(x)=\alpha\log g^*(x)-\beta\log h^*(x)+b(x)$$

属于BMO，且 $\|f\|_*\leqslant C(\alpha+\beta+\|b\|_\infty)$。

反之，每个BMO函数 f 都具有上述分解，且

$$\alpha+\beta+\|b\|_\infty\leqslant C\|f\|_*.$$

实际上，$\alpha\log g^*(x)$，$\beta\log h^*(x)\in$ BLO。

由这分解定理可以得到许多无界的BMO函数．参见[CR 1]。

3．设 $\omega(x)\geqslant 0$。我们称 $\omega\in A_p$(Muckenhoupt 权函数)，如果当 $1<p<\infty$时，ω 满足

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1}<\infty;$$

当 $p=1$ 时，$M(\omega)(x)\leqslant C\,\omega(x)$对几乎处处 x 成立，其中$M(\omega)$是ω 的Hardy-Littlewood 极大函数。

上述 ω 所满足的条件也称 A_p 条件或 Muckenhoupt 条件，它是由 Muckenhoupt 在研究 Hardy-Littlewood 极大函数加权不等式时得到的[Mu]。他证明了，若$1<p<\infty$，则

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}M(f)^p(x)\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant C_p\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x$$

成立的充分必要条件是 $\omega\in A_p$。若 $p=1$，则

$$\omega(\{x\in\boldsymbol{R}^n: M(f)(x)>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\omega(x)\mathrm{d}x$$

成立的充分必要条件是 $\omega\in A_1$，其中规定

$$\omega(E)=\int_E \omega(x)\mathrm{d}x.$$

后来，R.Coifman 与C.Fefferman证明了，把Hardy-Littlewood 极大函数换成很一般的奇异积分算子，上述结论依然成立，参见[CoF]。

BMO 函数与 A_p 权函数有着十分密切的关系。具体地说，设 $1<p<\infty$。若 $\omega\in A_p$，则 $\log\omega\in\mathrm{BMO}$；反过来，若 $\log\omega\in\mathrm{BMO}$，则存在 $\delta>0$，使得 $\omega^\delta\in A_p$。见[HMW]。当 $p=1$ 时，$f\in\mathrm{BLO}$的充分必要条件是对某个 $\varepsilon>0$，$e^{\varepsilon f}\in A_1$。

关于 A_p 权函数，可参阅[GR]。

4．Strömberg 给出了 BMO 的一个等价刻画．设 f 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的复值可测函数。令

$$\|f\|_{BMO_S}=\sup_Q \inf_C \inf\{t\geqslant 0: |\{x\in Q: |f(x)-c|>t\}|<S|Q|\}.$$

Strömberg 的结果是：对 $0<s\leqslant\frac{1}{2}$，$p>0$，存在仅依赖于维数 n 与 p 的常数 C，使得

$$s^{\frac{1}{p}}\|f\|_{BMO_s}\leqslant\|f\|_{*p}\leqslant C\|f\|_{BMO_s},$$

其中 $\|f\|_{*p}$ 的定义见推论1.2。由此，他用 Orlicz 范数推广 H^p 与 BMO，并证明了相应的对偶定理。详见[Str]。

5．N.Varopoulos 给出了BMO函数的另一个刻画，由此得到 BMO 在 $\bar{\partial}$ 问题与 Corona 问题中的应用。他证明了，如果 $f\in\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$，且具有紧支集，则存在 $F\in C^\infty(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$，满足

(i) $\lim\limits_{t\to 0} F(x,t)-f(x)\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$；

(ii) 测度 $|\nabla F|\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\left(\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|+\sum\limits_{j=1}^n\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}_+$ 的Carleson 测度；

(iii) 存在函数 $g(x)\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，使得 $\sup\limits_{t>0}|F(x,t)|\leqslant g(x)$；

(iv) $|\nabla F(x,t)|=O(1/t)$。

反之，如果$F\in C^1(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$，$|\nabla F|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ 是$\boldsymbol{R}^{n+1}_+$的 Carleson 测度，且 $\lim\limits_{t\to 0}F(x,t)=f(x)$对 $x\in\boldsymbol{R}^n$几乎处处存在，则

(i) 当 $n=1$ 时，$f\in\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R})$；

(ii) 当 $n\geqslant 2$ 时，若$|\nabla F(x,t)|=O(1/t)$，则 $f\in\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$。

参阅[V]

6．龙瑞麟与杨乐得到过BMO的另一种等价刻画。他们证明了，若对某个正整数k，

$$\sup_Q\inf_C\frac{1}{|Q|}\int_Q(\log^+)^k|f(x)-C|\,\mathrm{d}x<\infty,$$

则 $f\in\mathrm{BMO}$.由 John-Nirenberg 不等式的推论知，反过来也是成立的。实际上，杨乐-龙瑞麟证明了上述事实在 Coifman-Weiss 齐型空间上也成立，只要把 Q 理解为球体即可。参见[LY]。

7．帐篷空间(tent spaces)．1982年，Coifman-Meyer-Stein 在面积积分与 Carleson 测度研究的基础上，引入了帐篷空间

$$T^p_q=\{f|\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+),A_q(f)(x)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)\},$$

其中 $A_q(f)$的定义，如我们在定理 1.8 之前引入的，$0<p\leqslant 1\leqslant q<\infty$，$p<q$。设

$$T^\infty_q=\{f|\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n),C_q(f)\in L^\infty\},$$

其中 $C_q(f)$定义见定理1.8之前的等式。空间的范数是自然定义。

定理1.8实质上已给出了某些 T^p_q 的对偶空间的刻画。

为简单起见，我们叙述帐篷空间中有关 $q=2$ 时的主要结果。记 $T^p_2=T^p$，$A_2(f)=A(f)$，$C_2(f)=C(f)$。我们有

(i) $(T^1)^*=T^\infty$，

$$(T^p)^*=T^{p'},\ 1<p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1;$$

(ii) $\|A(f)\|_p\leqslant C_p\|C(f)\|_p$，当 $0<p<\infty$，

$$\|C(f)\|_p \leqslant C_p \|A(f)\|_p, \text{ 当 } 2<p\leqslant\infty.$$

(iii) T^p 空间有原子分解。称定义在$\mathbf{R}_+^{n+1}$ 的 $a(x,t)$为原子，如果

$$\operatorname{supp} a(x,t)\subset\hat{B}, \quad \|a(x,t)\|_\infty \leqslant C|B|^{-1/p},$$

其中 B 是$\mathbf{R}^n$ 的某个球体，$\hat{B}$为 B 的"帐篷"。对任意 $f\in T^p$，$0<p\leqslant 1$，有 $f=\sum\lambda_j a_j$，其中 a_j 为原子，$\sum|\lambda_j|^p\leqslant C\|f\|_{T^p}^p$。

(iv) 与L^p，H^p 的关系。令 $\psi\in\mathscr{S}$ 为径向函数，$\int_0^\infty|\hat{\psi}(t)|^2\frac{dt}{t}=1$，$\int_{\mathbf{R}^n}x^\alpha\psi(x)dx=0$ 当$0\leqslant|\alpha|\leqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$。定义作用在$T^p$ 的算子

$$\Pi_\psi(f)=\int_0^\infty f(\cdot,t)*\psi_t\frac{dt}{t},$$

则Π_ψ 可延拓为 T^p 到 $L^p(1<p<\infty)$或 T^p到$H^p(0<p\leqslant 1)$或T^∞到BMO的有界线性算子。反过来，$f\to f*\psi_t$ 是 L^p到$T^p(1<p<\infty)$，H^p 到$T^p(0<p\leqslant 1)$的有界线性算子。

对一般的 $1\leqslant q,p<q$，有类似的结果(参见[CMS 1]，[CMS 2]，[To])。对 $q=\infty$ 及一般的 Borel 测度，韩永生、龙瑞麟的文章有详尽的讨论[HL]。

8．1975年 Sarason 引入了VMO 空间（消失平均振动空间，vanishing mean oscillation)。设 $f\in L_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$，$\delta>0$，令

$$M_\delta(f)=\sup_{|Q|<\delta}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-m_Qf|dx.$$

如果 $f\in\text{BMO}$ 且 $\lim\limits_{\delta\to 0}M_\delta(f)=0$，则称 $f\in\text{VMO}$。

显然，VMO是BMO的一个闭子集合。另外，BMO与VMO的关系类似于 L^∞ 与有界一致连续函数之间的关系。记VC为一致连续函数空间，$\text{BVC}=L^\infty\cap\text{VC}$。Sarason[S]证明了，如果$f\in\text{BMO}$，则下列命题等价：

(i) $f\in \mathrm{VMO}$;

(ii) 记 $f_h(x)=f(x-h)$, $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h-f\|_*=0$;

(iii) $\lim\limits_{t\to 0}\|f*P_t-f\|_*=0$, P_t 为 Poisson 核;

(iv) $f\in\overline{\mathrm{VC}\cap\mathrm{BMO}}$(在BMO范数下取闭包),即

$$\inf_{g\in \mathrm{VC}\cap\mathrm{BMO}}\|f-g\|_*=0.$$

1977年, Coifman-Weiss证明了$(\mathrm{VMO})^*=H^1$(参见[CW 2])。

Sarason 还证明了,当 $n=1$ 时, $f\in\mathrm{VMO}(\boldsymbol{R})$当且仅当 $f=f_1+Hf_2+C$,其中 $f_1,f_2\in\mathrm{BVC}$,C是常数[S].有关内容可参阅[Ga].

9. 上半复平面上的解析函数 $F(z)$称为属于BMO空间的,如果 $y|F'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是上半平面的 Carleson 测度,其中$z=x+\mathrm{i}y$。定义$\|F\|_{\mathrm{BMO}}=\|y|F'(z)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\|_C$,$\|\cdot\|_C$ 表示 Carleson 测度范数。R.Rochberg 与 S.Semmes 给出了解析BMO函数的一个分解。

为叙述他们的结果,需要双曲(hyperbolic)距离的概念.若 z_1, $z_2\in\boldsymbol{R}^2_+$,z_1 与 z_2 间的双曲距离定义为

$$d(z_1,z_2)\sim\log\left(1+\frac{|x_1-x_2|}{y_1+y_2}\right)+\left|\log\frac{y_1}{y_2}\right|.$$

点列$\{z_j\}$称为是 η-稠密的,如果对任意 $z\in\boldsymbol{R}^2_+$,存在$\{z_j\}$的一点 z_k,使得 $d(z,z_k)<\eta$。点列$\{z_j\}$是η-分离的,如果对任意 $z_k,z_l\in\{z_j\}$,有$d(z_k,z_l)\geq\eta$。我们称$\{z_j\}$是一η-格,如果 $\{z_j\}$ 是 5η 稠密同时是 $\frac{\eta}{5}$ 分离的。Rochberg-Semmes 的结果是,若 f 是$\boldsymbol{R}^2_+$ 的解析函数且属于BMO,则对任意大于 1 的常数 b,存在 η-格$\{z_j\}$与常数C,使得

$$f(z)=\sum\lambda_j\frac{y_j^b}{(z-\bar z_j)^b},\qquad (*)$$

且

$$\left\|\sum|\lambda_j|^2y_j\delta_{z_j}\right\|_{CM}\leq C\|f\|^2_{\mathrm{BMO}},$$

这里 δ_{z_j} 表示点 z_j 处的 Dirac 测度。反之,如果有表达式(*)成立,且$\sum|\lambda_j|^2y_j\delta_{z_j}$ 是 Carleson 测度,则级数在BMO范数意义下

收敛，且

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}^2 \leqslant C \|\sum |\lambda_j|^2 y_j \delta_{z_j}\|_{\mathrm{CM}}.$$

利用这个结果可以证明，Hankel 算子是 L^2 有界的充分必要条件是它的符号的Bergman投影属于BMO. 参见[Ro]，[RoS 1]，[RoS 2].

第八章　H^p 空间的算子内插与内插空间

H^p 空间论的重要应用之一是算子内插与空间内插。

线性算子可以在H^p 空间之间作内插，也可以与L^p 空间作内插。这就为研究算子在L^p 空间与H^p 空间的有界性提供了工具。例如，在调和分析中，证明一些算子在L^p 有界，经常用的方法是先证明算子在 L^2 有界，然后证明它在 L^1 弱有界，再用 Marcinkiewicz 内插定理得到它在$L^p(1<p\leqslant 2)$的有界性。最后通过共轭算子的推理证明在$L^p(2<p<\infty)$的有界性。其中，证明L^1 弱有界性经常是比较复杂的。应用H^p 空间理论，我们可以不必去验证算子在 L^1 的弱有界性。只需证明算子是 H^1 到L^1 有界的，便可在H^1 与 L^2 之间作内插，得到算子在$L^p(1<p\leqslant 2)$的有界性。H^1 空间有原子分解，可以使推理大大简化。

本章讨论线性算子在H^p 与 L^p 空间之间的内插，同时还讨论这些空间之间的内插空间。

§8.1　算子在H^p空间的内插

定义1.1　我们称算子T是弱(H^p,p)型的，如果对任意 $\alpha>0$，$f\in H^p(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$|\{x\in \boldsymbol{R}^n: |T(f)(x)|>\alpha\}|\leqslant\left(\frac{M}{\alpha}\|f\|_{H^p}\right)^p,$$

其中M是与 α，f 无关的常数。

容易看出，若T是H^p 到 L^p 有界的，则它是弱(H^p,p)型的。反之当然不一定成立。

定理1.1 设$0<p_1\leqslant 1<p_2<\infty$，$T$是$H^{p_1}+L^{p_2}$到$R^n$上可测函数的次可加算子。若$T$是弱$(H^{p_1},p_1)$型与弱$(p_2,p_2)$型的，则对于$p$：$p_1<p<p_2$有

(1) 当$p\leqslant 1$时，T是H^p到L^p的有界算子；

(2) 当$p>1$时，T是L^p到L^p的有界算子。

这定理是Marcinkiewicz内插定理的推广。

为证明此定理，我们需要下面的引理，它是Calderón-Zygmund分解的一种形式。

引理1.1 设$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$p>1$，则对$0<p_1\leqslant 1<p<p_2\leqslant\infty$，$\alpha>0$，存在$f$的一个分解$f(x)=g(x)+b(x)$，使得$g\in L^{p_2}(\boldsymbol{R}^n)$，$b\in H^{p_1}(\boldsymbol{R}^n)$，并且

$$\|g\|_{p_2}^{p_2}\leqslant C\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p,$$

$$\|b\|_{H^{p_1}}^{p_1}\leqslant C\alpha^{p_1-p}\|f\|_p^p,$$

其中C与f,α无关。

证明 对$\alpha>0$，把$\boldsymbol{R}^n$等分成内部不交的方体，同时取方体的直径充分大，使得

$$\left(\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\alpha.$$

设Q'是上述这样的方体，把Q'等分成2^n个小方体。用Q''表示这些小方体中的一个。这时有两种可能：

(1) $\left(\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\alpha$；

(2) $\left(\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}>\alpha$。

对情形(2)，我们不再等分Q''，这时

$$\alpha<\left(\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\left(\frac{2^n}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant 2^{n/p}\alpha.$$

对情形(1)，继续2^n等分Q''. 如此不断做下去，便得到$\boldsymbol{R}^n$的一个分解。全体满足(2)的方体的内部构成开集Ω，它的余集为F. 总之，我们有

(i) $\boldsymbol{R}^n=\Omega\cup F,\ \Omega\cap F=\varnothing$;

(ii) $\Omega=\bigcup_j Q_j$, Q_j内部不交，满足

$$|\Omega|\leqslant\sum_j|Q_j|\leqslant\alpha^{-p}\sum_j\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\alpha^{-p}\|f\|_p^p;$$

(iii) 对每个Q_j，有不等式

$$\alpha<\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant 2^{n/p}\alpha;$$

(iv) $|f(x)|\leqslant\alpha$ 对 $x\in F$ 几乎处处成立，这是因为对几乎所有的$x\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$|f(x)|^p=\lim_{\substack{l(Q)\to 0\\ x\in Q}}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|^p\mathrm{d}y.$$

令

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F,\\ P_{Q_j}(f)(x), & x\in Q_j,\end{cases}$$

其中$P_{Q_j}(f)(x)$是次数不超过s的多项式，$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)\right]$，满足

$$\int_{Q_j}(f(x)-P_{Q_j}(f)(x))x^\alpha=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant s.$$

由§6.1中(1.5)知

$$|P_Q(f)(x)|\leqslant\frac{C}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x,$$

其中C是与f和Q无关的常数。令

$$b(x)=f(x)-g(x)=\sum_j[f(x)-P_{Q_j}(f)(x)]\chi_{Q_j}(x).$$

我们有

$$\|g\|_{p_2}^{p_2}=\int_F|g(x)|^{p_2}\mathrm{d}x+\int_\Omega|g(x)|^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_F|g(x)|^{p_2}\mathrm{d}x+\sum_j\int_{Q_j}|P_{Q_j}(f)(x)|^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\ \alpha^{p_2-p}\int_F|f(x)|^p\mathrm{d}x+\sum_j\|P_{Q_j}(f)\|_\infty^{p_2}|Q_j|$$

$$\leqslant C\ \alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+C\ \sum_j\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x\right)^{p_2}|Q_j|$$

$$\leqslant C\ \alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+C\ \sum_j\left\{\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{p_2/p}|Q_j|$$

$$\leqslant C\ \alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+C\ \alpha^{p_2}\sum_j|Q_j|$$

$$\leqslant C\ \alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+C\ \alpha^{p_2}|\Omega|\leqslant C\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p.$$

为证明$b\in H^{p_1}(\boldsymbol{R}^n)$，我们先证

$$a_j(x)=(C\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1/p_1}[f(x)-P_{Q_j}(f)(x)]\chi_{Q_j}(x)$$

是一个(p_1,p,s)原子. 事实上支集条件与消失矩条件是显然的，只需验证大小条件：

$$\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|a_j(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant (C\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1/p_1}\left[\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\|P_{Q_j}(f)\|_\infty\right]$$

$$\leqslant (C\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1/p_1}\left[\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right.$$

$$\left.+C\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x\right]$$

$$\leqslant (C\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1/p_1}\cdot C\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant |Q_j|^{-1/p_1}.$$

然而

$$\sum_j[C\alpha|Q_j|^{1/p_1}]^{p_1}=C\sum_j\alpha^{p_1}|Q_j|\leqslant C\alpha^{p_1}|\Omega|$$

$$\leqslant C\alpha^{p_1-p}\|f\|_p^p.$$

这就证明了

$$b(x)=\sum_j(C\alpha|Q_j|^{1/p_1})a_j(x)\in H^{p_1,p,s}(\boldsymbol{R}^n),$$

$$\|b\|_{H^{p_1}}^{p_1}\leqslant C\|b\|_{H^{p_1,p,s}}^{p_1}\leqslant C\alpha^{p_1-p}\|f\|_p^p,$$

引理1.1获证.

定理1.1的证明 先考虑$1\leqslant\frac{1}{p}=\frac{t}{p_1}+\frac{1-t}{p_2}$的情形. 设$a$是支集为$Q$的$(p,\infty,s)$原子, $s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p_1}-1\right)\right]$. 容易验证$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}a$是一个$(p_1,\infty,s)$原子, 从而

$$\|a\|_{H^{p_1,\infty,s}}\leqslant|Q|^{1/p_1-1/p}.$$

还有

$$\|a\|_{p_2}\leqslant|Q|^{1/p_2-1/p}.$$

因此

$$\|T(a)\|_p^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |T(a)(x)|>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant p\left(\int_0^M \alpha^{p-1}|\{|T(a)(x)|>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha\right.$$

$$\left.+\int_M^\infty \alpha^{p-1}|\{|T(a)(x)|>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha\right)$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}。$$

对 I，由 T 是弱 (H^{p_1}, p_1) 型，知

$$\mathrm{I}\leqslant C\int_0^M \alpha^{p-1}\alpha^{-p_1}\|a\|_{H^{p_1}}^{p_1}\,\mathrm{d}\alpha\leqslant CM^{p-p_1}|Q|^{1-p_1/p}.$$

对 II，由 T 是弱 (p_2, p_2) 型，知

$$\mathrm{II}\leqslant C\int_M^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-p_2}\|a\|_{p_2}^{p_2}\,\mathrm{d}\alpha\leqslant CM^{p-p_2}|Q|^{1-p_2/p}.$$

取 $M=|Q|^{-1/p}$，便得到 $\|T(a)\|_p^p\leqslant C$。用 H^p 空间原子分解的常规方法，便可证明 T 是 H^p 到 L^p 有界的。

对 $p>1$ 的情形。由引理1.1作分解 $f=g+b$，其中

$$\|g\|_{p_2}^{p_2}\leqslant C\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p,$$

$$\|b\|_{H^{p_1}}^{p_1}\leqslant C\alpha^{p_1-p}\|f\|_p^p.$$

因此

$$\begin{aligned}&|\{x\in \boldsymbol{R}^n: |T(f)(x)|>\alpha\}|\\&\quad\leqslant|\{|T(g)(x)|>\alpha/2\}|+|\{|T(h)(x)|>\alpha/2\}|\\&\quad\leqslant C\alpha^{-p_2}\|g\|_{p_2}^{p_2}+C\alpha^{-p_1}\|b\|_{H^{p_1}}^{p_1}\\&\quad\leqslant C\alpha^{-p}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

这说明对任意 $p>1$，T 是弱 (p,p) 型的。由 Marcinkiewicz 内插定理，对任意 $p>1$，T 是 L^p 有界的。

下面考虑在 H^p 空间之间作内插。

定义1.2 设 $0<p_i\leqslant 1\leqslant q<\infty$，$p_i<q$，$i=1,2$，整数 $s\geqslant \max\limits_{i=1,2}\left[n\left(\frac{1}{p_i}-1\right)\right]$，$T$ 是次可加算子。我们称 T 是 $(H^{p_1,q,s}, H^{p_2,q,s})$ 型的，如果 T 是 $H^{p_1,q,s}$ 到 $H^{p_2,q,s}$ 有界的，即

$$\|T(f)\|_{H^{p_2,q,s}}\leqslant C\|f\|_{H^{p_1,q,s}}.$$

定理1.2 设 $0<p_0<p_1\leqslant 1\leqslant q<\infty$，$p_0,p_1<q$，$0<\theta_0<\theta_1\leqslant 1$，$\theta_0,\theta_1<q$，$p_i\leqslant\theta_i$，$i=0,1$，整数 $s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p_0}-1\right)\right]$。若 T 是 $(H^{p_0,q,s},H^{\theta_0,q,s})$ 与 $(H^{p_1,q,s},H^{\theta_1,q,s})$ 型的，则 T 是 $H^{p,q,s}$ 到 $H^{\theta,q,s}$ 的有界算子，其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\qquad \frac{1}{\theta}=\frac{1-t}{\theta_0}+\frac{t}{\theta_1},$$

t 是 $(0,1)$ 中任一个数。

证明 我们利用 H^p 的 S 函数刻画。取径向函数 $\psi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$\operatorname{supp}\psi\subset\{|x|\leqslant 1\}$，$\int_{R^n}\psi(x)x^\alpha\mathrm{d}x=0\,(0\leqslant|\alpha|\leqslant s)$，且

$$\int_0^\infty|\hat{\psi}(\xi t)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}=1\quad(\xi\neq 0).$$

我们只要证明，对任意 (p,q,s) 原子 a，以及由 ψ 定义的 S 函数，有

$$\|S(Ta)\|_\theta\leqslant C, \tag{1.1}$$

并且 Ta 在无穷远处弱为 0，即

$$\lim_{t\to\infty}Ta*\psi_t(x)=0.$$

事实上，弱为 0 的条件是显然的，因为 a 是 (p_i,q,s) 原子的某个倍数，而 $Ta\in H^{\theta_i,q,s}$。

为了证明(1.1)，我们来估计

$$\|S(Ta)\|_\theta^\theta = \theta\int_0^\infty \alpha^{\theta-1}|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ S(Ta)(x)>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha$$

$$=\theta\int_0^M \alpha^{\theta-1}|\{S(Ta)(x)>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha$$

$$+\theta\int_M^\infty \alpha^{\theta-1}|\{S(Ta)(x)>\alpha\}|\mathrm{d}\alpha$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

设 a 的支集为方体 Q。显然，$|Q|^{1/p-1/p_0}a$ 是 (p_0,q,s) 原子，而 $|Q|^{1/p-1/p_1}a$ 是 (p_1,q,s) 原子。从而

$$\|a\|_{H^{p_i,q,s}} \leqslant |Q|^{1/p_i-1/p}, \qquad i=0,1.$$

由定理条件知

$$\mathrm{I}\leqslant\theta\int_0^M \alpha^{\theta-\theta_0-1}\|S(Ta)\|_{\theta_0}^{\theta_0}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant C\theta\int_0^M \alpha^{\theta-\theta_0-1}\|Ta\|_{H^{\theta_0,q,s}}^{\theta_0}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant C\theta\int_0^M \alpha^{\theta-\theta_0-1}\|a\|_{H^{p_0,q,s}}^{\theta_0}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant C\theta\int_0^M \alpha^{\theta-\theta_0-1}|Q|^{(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})\theta_0}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant C\theta M^{\theta-\theta_0}|Q|^{(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})\theta_0}.$$

类似地可得

$$\mathrm{II}\leqslant CM^{\theta-\theta_1}|Q|^{(1/p_1-1/p)\theta_1}.$$

现取

$$M=\exp\left\{\left[\frac{1}{\theta_1-\theta_0}\left(\frac{\theta_1}{p_1}-\frac{\theta_0}{p_0}\right)-\frac{1}{p}\right]\ln|Q|\right\},$$

则

$$\|S(Ta)\|_{\theta}^{\theta}\leqslant \mathrm{I}+\mathrm{II}$$

$$\leqslant C\cdot\exp\left\{\left[\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}\left(\frac{\theta_1}{p_1}-\frac{\theta_0}{p_0}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\theta-\theta_0}{p}+\theta_0\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right)\right]\ln|Q|\right\}.$$

注意到$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{1}{p_1}$，$\frac{1}{\theta}=\frac{1-t}{\theta_0}+\frac{t}{\theta_1}$，便知

$$\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}\left[\frac{\theta_1}{p_1}-\frac{\theta_0}{p_0}\right]-\frac{\theta-\theta_0}{p}+\theta_0\left[\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}\right)\left[\theta_1\cdot\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}\frac{(1/p_1)-(1/p_0)}{(1/p)-(1/p_0)}-\theta\right].$$

由于

$$\frac{(1/p_1)-(1/p_0)}{(1/p)-(1/p_0)}=\frac{(1/\theta_1)-(1/\theta_0)}{(1/\theta)-(1/\theta_0)},$$

知

$$\theta_1\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}\frac{(1/p_1)-(1/p_0)}{(1/p)-(1/p_0)}-\theta$$

$$=\theta_1\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}\frac{(1/\theta_1)-(1/\theta_0)}{(1/\theta)-(1/\theta_0)}-\theta=0,$$

这就证明了(1.1)，从而定理1.2得证.

下面讨论解析算子族在H^p空间上的作用.

定义1.3 设$S=\{z\in \boldsymbol{C}:\ 0<\mathrm{Re}\,z<1\}$，$\Phi(z)$定义在$\bar{S}$上.我们称$\Phi$是可接受增长的，如果存在常数$B$与$b$，$b<\pi$，使得

$$\Phi(z)\leqslant Be^{b|\mathrm{Im}z|}$$

对所有$z\in S$成立.

定义1.4 设$\{T_z\}$，$z\in\bar{S}$，是一算子族，其中每一个算子T_z都把$\boldsymbol{R}^n$的简单函数映成$\boldsymbol{R}^n$上的可测函数.我们称$\{T_z\}$为解析算子族，如果

$$z \to \int_{R^n} (T_z \varphi)(x) \psi(x) \mathrm{d}x$$

对 R^n 上任意简单函数 φ 与 ψ 都是在 S 解析、在 $\bar{S}$ 连续的。

定义1.5 解析算子族 $\{T_z\}$ 被称为可接受的，如果函数

$$\log \| T_z(\varphi) \|_1$$

对每个 R^n 上的简单函数 φ 都是可接受增长的。

定理1.3 设 $0 < p_0 < p_1 \leqslant 1$，整数 $s \geqslant \left[n\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) \right]$，$\{T_z\}$ 是可接受的解析线性算子族，且满足

$$\| T_{j+iy}(f) \|_{p_j} \leqslant A_j \| f \|_{H^{p_j, q, s}}, \quad j = 0, 1$$

对所有 $f \in H^{p_j, q, s} \cap L^{p_j}$ 与 $-\infty < y < \infty$ 成立，$j = 0, 1$。则对每个 t，$0 < t < 1$，有

$$\| T_t(f) \|_p \leqslant A_0^{1-t} A_1^t \| f \|_{H^{p, q, s}},$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}.$$

为证明定理1.3，我们需要几个引理。

引理1.2 设 φ: $S \to \boldsymbol{R}$ 是可接受增长的下调和函数，则对 $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$，有

$$\varphi(z_0) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathrm{i}(y_0 + y)) W(1 - x_0, y) \mathrm{d}y$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[1 + \mathrm{i}(y_0 + y)] W(x_0, y) \mathrm{d}y,$$

其中

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi x}{\cos(\pi x) + \cosh(\pi y)}.$$

证明 不妨假定 $y_0 = 0$。考虑

$$h(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\log\frac{i(1+\zeta)}{1-\zeta},$$

它把C的单位圆盘D(除去点 1 与 -1)保形映射到S. 因此, $G(\zeta)=\varphi(h(\zeta))$是$D\setminus\{-1,1\}$的下调和函数. 故对$\zeta=\rho e^{i\theta}$, 有

$$G(\zeta)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}G(Re^{i\varphi})d\varphi. \tag{1.2}$$

把φ是可接受增长的条件转移到G与$\eta=h^{-1}(x_0+iy)$, 知

$$G(\eta)\leqslant C(|1+\eta|^{-b/\pi}+|1-\eta|^{-b/\pi}).$$

取$\eta=Re^{i\varphi}$. 由$\frac{b}{\pi}<1$知, 对(1.2)中的积分可用 Lebesgue 控制收敛定理. 令$R\to1$, 当$\zeta=\rho e^{i\theta}(0<\rho<1)$时, 有

$$G(\zeta)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}G(e^{i\varphi})d\varphi. \tag{1.3}$$

在这不等式中进行变量替换, 便可得到引理所要求的结果. 事实上, 条件$0<x_0=h(\rho e^{i\theta})<1$很容易转换成加在$\rho,\theta$上的条件: $0<\rho<1$. 因为这时必有

$$\rho e^{i\theta}=h^{-1}(x_0)=\frac{e^{i\pi x_0}-i}{e^{i\pi x_0}+i}=\frac{\cos\pi x_0}{1+\sin\pi x_0}e^{-i\pi/2}.$$

因而, 当$0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$时,

$$\rho=\frac{\cos\pi x_0}{1+\sin\pi x_0},\quad \theta=-\frac{\pi}{2};$$

而当$\frac{1}{2}\leqslant x_0<1$时,

$$\rho=-\frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x},\quad \theta=\frac{\pi}{2}.$$

在前一种情形, 我们有

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\rho^2}$$

$$=\frac{1-\rho^2}{1+2\rho\sin\varphi+\rho^2}=\frac{\sin(\pi x_0)}{1+\cos(\pi x_0)\sin\varphi}.$$

而且，当$\frac{1}{2}\leqslant x<1$时，这一等式也成立。注意到

$$e^{i\varphi}=h^{-1}(iy)=\frac{e^{-\pi y}-i}{e^{-\pi y}+i},$$

当φ从$-\pi$到 0 取值时，y从$+\infty$到$-\infty$取值，此外，

$$\sin\varphi=-\frac{1}{\cosh(\pi y)},\qquad d\varphi=-\frac{\pi}{\cosh(\pi y)}dy.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}G(e^{i\varphi})d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)}{\cosh(\pi y)-\cos(\pi x)}\varphi(iy)dy.$$

类似地，当φ从 0 到π取值时，$h(e^{i\varphi})$描出点$1+iy$，$-\infty<y<\infty$。故

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}G(e^{i\varphi})d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)}{\cosh(\pi y)+\cos(\pi x)}\varphi(1+iy)dy.$$

把这些代回(1.3)，便得到引理所要求的结果.

引理1.3 设ψ是从S映到$L(\boldsymbol{R}^n)$上的解析函数，$0<C\leqslant 1$，则

$$\varphi(z)=\int_{\boldsymbol{R}^n}|\psi(z)|^C dx$$

是连续函数，且 $\log\varphi(z)$是下调和的。

证明 φ 连续是显然的。记 $F(z)=\log\varphi(z)$。我们只需证明 $\Delta F(z)\geqslant 0$。记$z=x_1+\mathrm{i}y_1$，$\psi=u+\mathrm{i}v$，则

$$F(z)=\log\varphi(z)=\log\int_{R^n}[u^2(x_1,y_1)+v^2(x_1,y_1)]^{C/2}\mathrm{d}x.$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial x_1}F(z)=\frac{C}{\varphi(z)}\int_{R^n}(u^2+v^2)^{\frac{C}{2}-1}(uu_{x_1}+vv_{x_1})\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}F(z)=-\frac{C^2}{\varphi^2(z)}\left(\int_{R^n}(u^2+v^2)^{\frac{C}{2}-1}(uu_{x_1}+vv_{x_1})\mathrm{d}x\right)^2$$

$$+\frac{C}{\varphi(z)}\int_{R^n}\left(\frac{C}{2}-1\right)(u^2+v^2)^{\frac{C}{2}-2}(uu_{x_1}+vv_{x_1})^2\mathrm{d}x$$

$$+\frac{C}{\varphi(z)}\int_{R^n}(u^2+v^2)^{\frac{C}{2}-1}$$

$$\times(u_{x_1}^2+v_{x_1}^2+uu_{x_1x_1}+vv_{x_1x_1})\mathrm{d}x.$$

注意到$\Delta u=\Delta v=0$，$u_{x_1}=v_{x_2}$，$u_{x_2}=-v_{x_1}$，有

$$\Delta F(z)=-\frac{C^2}{\varphi^2(z)}\left(\int_{R^n}(u^2+v^2)^{\frac{C}{2}-1}(uu_{x_1}+vv_{x_1})\mathrm{d}x\right)^2$$

$$-\frac{C^2}{\varphi^2(z)}\left(\int_{R^n}(u^2+v^2)^{\frac{C}{2}-1}(uu_{x_2}+vv_{x_2})\mathrm{d}x\right)^2$$

$$+\frac{C(C/2+1)}{\varphi(z)}\int_{R^n}(u^2+v^2)^{\frac{C}{2}-1}(u_{x_1}^2+v_{x_1}^2)\mathrm{d}x.$$

用Cauchy公式，只要$\left(\frac{C}{2}+1-C\right)\geqslant 0$即 $2\geqslant C>0$，便有$\Delta F(z)\geqslant 0$.

引理1.4 设$0<p_0<p_1\leqslant 1$，整数$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p_0}-1\right)\right]$，$a$是$(p,q,s)$原子，其中$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则存在解析函数$h(z)$：$S\to L(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\|h(\mathrm{i}y)\|_{H^{p_0,q,s}}\leqslant 1,$$

$$\|h(1+\mathrm{i}y)\|_{H^{p_1,q,s}}\leqslant 1$$

对$-\infty<y<\infty$成立，并且还有$h(t)=a$。

证明 设a的支集是方体Q，令$h(z)=|Q|^{\alpha(z)}a$，其中$\alpha(z)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}\right)(1-z)+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)z$。这时$\alpha(t)=0$，故$h(t)=a$，且$\mathrm{Re}\alpha(\mathrm{i}y)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}$，$\mathrm{Re}\alpha(1+\mathrm{i}y)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}$。进一步还有

$$\|a\|_{H^{p_0,q,s}}\leqslant|Q|^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}},$$

$$\|a\|_{H^{p_1,q,s}}\leqslant|Q|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}}.$$

因此

$$\|h(\mathrm{i}y)\|_{H^{p_0,q,s}}\leqslant|Q|^{\mathrm{Re}\alpha(\mathrm{i}y)}\|a\|_{H^{p_0,q,s}}\leqslant 1,$$

$$\|h(1+\mathrm{i}y)\|_{H^{p_1,q,s}}\leqslant|Q|^{\mathrm{Re}\alpha(1+\mathrm{i}y)}\|a\|_{H^{p_1,q,s}}\leqslant 1.$$

定理1.3的证明 只要证明，对任意的(p,q,s)原子a，有

$$\|T_ta\|_p\leqslant A_0^{1-t}A_1^t, \tag{1.4}$$

因为对一般情形，只需利用原子分解即可。

设a的支集为Q，$h(z)$是由引理1.4所决定的解析函数。取$\theta>p/p_0>1$，g是非负简单函数，且$\|g\|_{\theta'}\leqslant 1$，其中$\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1$。令

$$\varphi(z)=\int_{\boldsymbol{R}^n}[g(x)]^{\beta(z)}|T_zh(z)(x)|^{p/\theta}\mathrm{d}x,$$

其中$\beta(z)=\theta'-\frac{\theta' p}{\theta}\left(\frac{1-z}{p_0}-\frac{z}{p_1}\right)$。显然

$$\beta(t)=\theta'-\frac{\theta'}{\theta}=1,$$

$$\mathrm{Re}\beta(\mathrm{i}y)=\frac{\theta'(\theta p_0-p)}{\theta p_0},$$

$$\mathrm{Re}\beta(1+\mathrm{i}y)=\frac{\theta'(\theta p_1-p)}{\theta p_1}.$$

应用Hölder不等式，便知

$$|\varphi(\mathrm{i}y)|\leqslant\int_{R^n}[g(x)]^{\frac{\theta'(\theta p_0-p)}{\theta p_0}}|T_{\mathrm{i}y}h(\mathrm{i}y)|^{\frac{p}{\theta}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left\{\int_{R^n}[g(x)]^{\theta'}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{\theta p_0-p}{\theta p_0}}$$

$$\times\left\{\int_{R^n}|T_{\mathrm{i}y}h(\mathrm{i}y)|^{\frac{p}{\theta}\cdot\theta\frac{p_0}{p}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{p}{\theta p_0}}$$

$$\leqslant\left(\int_{R^n}|T_{\mathrm{i}y}h(\mathrm{i}y)|^{p_0}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{\theta p_0}}$$

$$\leqslant A_0^{p/\theta}\|h(\mathrm{i}y)\|^{p/\theta}_{H^{p_0,q,s}}$$

$$\leqslant A_0^{p/\theta}.$$

同理可得

$$|\varphi(1+\mathrm{i}y)|\leqslant A_1^{p/\theta}.$$

由引理1.3知$\log\varphi(z)$是下调和函数，再根据引理 1.2，推得

$$\log\varphi(t)\leqslant\log A_0^{\frac{p}{\theta}(1-t)}A_1^{\frac{p}{\theta}t},$$

因此

$$\varphi(t)=\int_{R^n}[g(x)]|T_t(a)|^{\frac{p}{\theta}}dx\leqslant A_0^{\frac{p}{\theta}(1-t)}A_1^{\frac{p}{\theta}t}.$$

对$\|g\|_{\theta'}\leqslant 1$取上确界，便得

$$\left(\int_{R^n}|T_t(a)|^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}}\leqslant A_0^{\frac{p}{\theta}(1-t)}A_1^{\frac{p}{\theta}t},$$

即

$$\|T_t(a)\|_p\leqslant A_0^{1-t}A_1^t.$$

为讨论L^p与L^∞的内插，我们引入 C.Fefferman-Stein 的#函数。

定义1.6 设$f\in L_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，定义

$$f^{\#}(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-m_Qf|dy,$$

其中上确界对一切包含x的方体来取，m_Qf是f在Q的平均。$f^{\#}$称为f的sharp函数，或称f的#函数。

#函数是 Hardy-Littlewood 极大函数概念的发展。显然

$$f^{\#}(x)\leqslant 2M(f)(x).$$

因此，当$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p\leqslant\infty$时，有

$$\|f^{\#}\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

另外，显然还有，$f^{\#}\in L^\infty$当且仅当$f\in \mathrm{BMO}$。

定理1.4 当$1<p<\infty$时，有

$$\|f\|_p\leqslant C_p\|f^{\#}\|_p.$$

我们实际上要证明的是

$$\|M_d(f)\|_p\leqslant C_p\|f_d^{\#}\|,\qquad 1<p<\infty,\tag{1.5}$$

其中M_d，$f_d^{\#}$分别表示二进极大函数与二进#函数，也就是说，定义中的上确界都是对二进方体取的。

假如(1.5)已证，由§1.1中推论1.3的变形，知

$$|f(x)|\leqslant M_d(f)(x),\qquad \text{a.e.}$$

从而得到

$$\|f\|_p\leqslant\|M_d(f)\|_p\leqslant C_p\|f_d^{\#}\|_p\leqslant C_p\|f^{\#}\|_p,$$

即由(1.5)可立即推得定理1.4。

为证明(1.5)，我们用"good λ 不等式"技巧。

引理1.5(good λ不等式)　设μ是$\boldsymbol{R}^n$的Radon测度，$0\leqslant u,v\in L^p(\boldsymbol{R}^n,\mathrm{d}\mu)$。若存在$\gamma>0$，$0<\varepsilon<2^{-p}$，使得对任意$\alpha>0$，有

$$\mu\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ v(x)>2\alpha,\ u(x)<\gamma\alpha\}\leqslant\varepsilon\mu\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ v(x)>\alpha\},$$

则

$$\|v\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}\leqslant C_p\|u\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)},\qquad 0<p<\infty.$$

证明

$$\int_{R^n}v(x)^p\mathrm{d}\mu(x)=p2^p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ v(x)>2\alpha\}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant p2^p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ v(x)>2\alpha,\ u(x)\leqslant\gamma\alpha\}\mathrm{d}\alpha$$

$$+p2^p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ u(x)>\gamma\alpha\}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant p2^p\varepsilon\int_0^\infty\alpha^{p-1}\mu\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ v(x)>\alpha\}\mathrm{d}\alpha$$

$$+2^p\gamma^{-p}\|u\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}$$

$$\leqslant 2^p\varepsilon\|v\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}^p+2^p\gamma^{-p}\|u\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)},$$

故

$$\|v\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}\leqslant\frac{2}{\gamma}(1-2^p\varepsilon)^{-1/p}\|u\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}.$$

值得指出的是，条件$\|v\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}<\infty$是不能省去的。但可代之以$\min(1,v)\in L^p(\mathrm{d}\mu)$，这是因为，可以先对$\min(m,v)$证明引

理，然后再取极限，只需应用

$$\|v\|_{L^p(d\mu)}^p=\lim_{m\to\infty}\|\min(m,v)\|_{L^p(d\mu)}^p.$$

式(1.5)的证明 根据引理1.5，只要证存在 C_p，使得

$$\begin{aligned}&|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ M_d(f)(x)>2a,\ f_d^\#(x)<\gamma a\}|\\&\leqslant C_p|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ M_d(f)(x)>a\}|,\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中 $2^pC_p<1$。

先假设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$。令 $\Omega=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ M_d(f)(x)>a\}$。把 Ω 分解为二进方体之并。我们只需对每个极大方体 Q，证明

$$|\{x\in Q:\ M_d(f)(x)>2a,\ f_d^\#(x)\leqslant\gamma a\}|\leqslant C2^n\gamma|Q|$$

即可。由 Q 是极大方体，对任意二进方体 $Q'\supset Q$，有

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant a.$$

故当 $x\in Q$，$M_d(f)(x)>2a$ 时，有 $M_d(f\chi_Q)(x)>2a$。若 $Q\subsetneqq\tilde{Q}$，$\tilde{Q}$ 是 Q 上一代的二进方体，则由

$$\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant a,$$

推得

$$M_d[(f-m_{\tilde{Q}}f)\chi_Q](x)>a.$$

根据 M_d 的弱(1,1)型，有

$$\begin{aligned}&|\{x\in Q:\ M_d[(f-m_{\tilde{Q}}f)\chi_Q](x)>a\}|\\&\leqslant\frac{C}{a}\int_Q|f(y)-m_{\tilde{Q}}f|\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{C2^n|Q|}{a}\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f(y)-m_{\tilde{Q}}f|\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{C2^n|Q|}{a}\inf_{x\in Q}f_d^\#(x).\end{aligned}$$

故

$$|\{x\in Q:\ M_d(f)(x)>2\alpha,\ f_d^{\#}(x)<\gamma\alpha\}|$$
$$\leqslant|\{x\in Q:\ M_d[(f-f_{\tilde{Q}})\chi_Q](x)>\alpha,\ f_d^{\#}(x)<\gamma\alpha\}|$$
$$\leqslant C2^n\gamma|Q|,$$

取γ充分小，便可推得(1.6)。

下面去掉$f\in L^p(R^n)$的假设。只要考虑

$$f_N(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant N,\\ N\operatorname{sgn}f(x), & |f(x)|>N,\end{cases}$$

则$f^{\#}\in L^p$可推出$f_N\in L^p$。通过极限过程便可在一般条件下证得(1.5)。

定理1.5 设T是线性算子。若对某个$p>1$，T是L^p有界的，并且T是L^∞到BMO有界的，则T是L^q有界的，只要$p<q<\infty$。

证明 考虑算子$f\to(Tf)^{\#}$。它是(p,p)型的，这是因为

$$\|(Tf)^{\#}\|_p\leqslant\|2M(Tf)\|_p\leqslant C_p\|Tf\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

同时，因为

$$\|(Tf)^{\#}\|_\infty=\|Tf\|_*\leqslant C\|f\|_\infty,$$

它也是(∞,∞)型的。用Marcinkiewicz内插定理，算子$(Tf)^{\#}$是(q,q)型的，$p<q<\infty$。故

$$\|Tf\|_q\leqslant\|M_d(Tf)\|_q\leqslant C_q\|(Tf)^{\#}\|_q\leqslant C\|f\|_q.$$

§8.2 H^p空间的内插空间(实方法)

粗略地说，寻找两个Banach空间(或拟Banach空间)A与B的内插空间，是要刻画出A与B的那些“中间空间”，使得当线性算子分别在A与B有界时，便自动地在这些“中间空间”上也有界。寻找内插空间有两种方法：实方法与复方法。本节先叙述实方法。

设$\mathscr{H}$是一复线性的Hausdorff空间，A_0与A_1是两个拟Banach空间，使得A_0,A_1都可线性连续地嵌入到$\mathscr{H}$中。特别$A_0+A_1\subset\mathscr{H}$。

对任意$0<t<\infty$，$a\in A_0+A_1$，定义K泛函如下：

$$K(t,a)=K(t,a;A_0,A_1)=\inf_{\substack{a=a_0+a_1\\ a_0\in A_0,a_1\in A_1}}(\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1})。$$

定义2.1 设$0<\theta<1$，$0<q<\infty$，定义

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}=\{a|\in A_0+A_1:\ \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}<\infty\},$$

其中

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\left(\int_0^\infty[t^{-\theta}K(t,a)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

当$q=\infty$时，定义

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t,a)。$$

容易证明，当A_0,A_1是拟Banach空间时，$(A_0,A_1)_{\theta,q}$也是拟Banach空间。

定理2.1 设$\mathscr{X},A_0,A_1$如前所述，T是由$\mathscr{X}$到自身的线性算子，它分别在A_0与A_1有界，则对$0<\theta<1$，$0<q\leq\infty$，T在$(A_0,A_1)_{\theta,q}$有界。

证明 设$a=a_0+a_1$，$a_0\in A_0$，$a_1\in A_1$，则

$$Ta=Ta_0+Ta_1,$$

$$\|Ta_j\|_{A_j}\leqslant\|T\|_j\ \|a_j\|_{A_j}.$$

故

$$\begin{aligned}K(t,Ta)&\leqslant\inf_{a=a_0+a_1}(\|Ta_0\|_{A_0}+t\|Ta_1\|_{A_1})\\&\leqslant\|T\|_0\inf(\|a_0\|_{A_0}+t\|T\|_1\|T\|_0^{-1}\|a_1\|_{A_1})\\&=\|T\|_0K(t\|T\|_1\|T\|_0^{-1},a).\end{aligned}$$

代入定义2.1的$\|\cdot\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}$中，便得

$$\|Ta\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}\leqslant\|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^{\theta}\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}.$$

定理2.1表明，$(A_0,A_1)_{\theta,q}$是A_0,A_1的内插空间。但对具体

的A_0, A_1，我们还经常需要进一步刻画$(A_0, A_1)_{\theta,q}$。这就要求估计K泛函。在考虑Lebesgue空间L^p以及Hardy空间H^p等的内插空间时，函数重排的概念起着重要的作用。

设f是$\boldsymbol{R}^n$上的局部可积函数，$\lambda(s)$是它的分布函数

$$\lambda(s) = \lambda_f(s) = |\{x \in \boldsymbol{R}^n: \ |f(x)| > s\}|.$$

定义

$$f^*(t) = \inf\{s: \lambda(s) \leqslant t\}, \qquad t > 0$$

为f的非增重排函数。显然，f^*是非增的。假如f是连续、严格递降的，则f^*是$\lambda(s)$的反函数，也是连续、严格递降的。在一般的情形，不难证明，λ与f^*都是非增右连续的。因此，$\lambda(f^*(t)) \leqslant t$。另外，从$f^*$的定义看出，当且仅当$t < \lambda(s)$时，$f^*(t) > s$，即$\{t > 0: \ f^*(t) > s\}$恰好是区间$(0, \lambda(s))$。这表明，$f$与$f^*$有相同的分布函数。这就是$f^*$被称为$f$的非增重排的原因。因此

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)| \mathrm{d}x = \int_0^\infty f^*(s) \mathrm{d}s.$$

对任意$E \subset \boldsymbol{R}^n$，有

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{|E|} f^*(s) \mathrm{d}s. \tag{2.1}$$

但当$E = \{x \in \boldsymbol{R}^n: \ |f(x)| > t\}$时，

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{\lambda(t)} f^*(s) \mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

定义2.2 当$1 \leqslant p < \infty$，$1 \leqslant q < \infty$时，定义

$$\|f\|_{pq}^* = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q},$$

当$1 \leqslant p \leqslant \infty$，$q = \infty$时，定义

$$\|f\|_{pq}^* = \sup_{t > 0} t^{1/p} f^*(t).$$

而

$$L_{pq}=\{f \mid 在 \boldsymbol{R}^n 可测，\|f\|_{pq}^* < \infty\},$$

称为 Lorentz 空间。

从 f 与 f^* 有等分布，知

$$\|f\|_{pp}^* = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt\right)^{1/p} = \|f^*\|_p = \|f\|_p,$$

故 $L_{pp}=L^p$。一般说来，$\|\cdot\|_{pq}^*$ 不是范数。令

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \quad t>0. \tag{2.3}$$

当 $1\leqslant p<\infty$，$1\leqslant q<\infty$ 时，记

$$\|f\|_{pq}=\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{1/p} f^{**}(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q};$$

当 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$q=\infty$ 时，记

$$\|f\|_{pq}=\sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t).$$

定理2.2 若 $f\in L(p,q)$，$1<p\leqslant\infty$，则

$$\|f\|_{pq}^* \leqslant \|f\|_{pq} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{pq}^*.$$

证明 由 $f^*(s)$ 非增，知

$$f^*(t)\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\leqslant f^{**}(t),$$

这就推出第一个不等式。第二个不等式是熟知的Hardy不等式

$$\left(\int_0^\infty\left[\int_0^t g(u)du\right]^q t^{-r-1}dt\right)^{1/q}\leqslant\frac{q}{r}\left(\int_0^\infty[ug(u)]^q u^{-r-1}du\right)^{1/q}$$

$$(q\geqslant 1,\ r>0,\ g(u)\geqslant 0,\ g\in L(0,\infty))$$

的直接推论。

一般说来 $\|\cdot\|_{pq}^*$ 不是范数，因为 Minkowski 不等式可能不成

立。但$\|\cdot\|_{pq}$却是范数($1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$)。可以证明，具有范数$\|\cdot\|_{pq}$的$L_{pq}$是Banach空间。

定理2.3

$$K(t,f;L^1,L^\infty)=\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s=tf^{**}(t).$$

证明 对$t>0$，取

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x)-f^*(t)f(x)/|f(x)|, & \text{当}|f(x)|>f^*(t),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$f_1=f-f_0$.

记

$$E=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ f_0(x)\neq 0\}=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ |f(x)|>f^*(t)\}.$$

显然，$|E|<t$。由于$f^*(s)$在$[|E|,t]$上是常数，故

$$\begin{aligned}K(t,f;L^1,L^\infty)&\leqslant\|f_0\|_1+t\|f_1\|_\infty\\&=\int_E(|f(x)|-f^*(t))\mathrm{d}x+tf^*(t)\\&\leqslant\int_0^{|E|}(f^*(s)-f^*(t))\mathrm{d}s+tf^*(t)\\&=\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

反过来，设$f=f_0+f_1$, $f_0\in L^1$, $f_1\in L^\infty$，由

$$\lambda_f(\sigma_0+\sigma_1)\leqslant\lambda_{f_0}(\sigma_0)+\lambda_{f_1}(\sigma_1),$$

有

$$f^*(s)\leqslant f_0^*((1-\varepsilon)s)+f_1^*(\varepsilon s).$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s&\leqslant\int_0^t f_0^*((1-\varepsilon)s)\mathrm{d}s+\int_0^t f_1(\varepsilon s)\mathrm{d}s\\&\leqslant(1-\varepsilon)^{-1}\|f_0\|_1+tf_1^*(0)\end{aligned}$$

$$\leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\|f_0\|_1 + t\|f_1\|_\infty.$$

取下确界，并令$\varepsilon\to 0$，得

$$K(t,f;L^1,L^\infty)\geqslant\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s.$$

推论2.1 若$0<\theta<1$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则

$$(L^1,L^\infty)_{\theta,q} = L_{pq},$$

其中$\theta = 1-\dfrac{1}{p}$.

下面讨论H^1与L^∞的内插空间.

引理2.1 若$f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$(M(f))^*(t)\leqslant 3^n f^{**}(t),$$

其中$M(f)$是f的Hardy-Littlewood极大函数.

证明 分解$f=f_0+f_1$，其中f_0,f_1与定理2.3证明中的相同.这时

$$\|f_0\|_1\leqslant t(f^{**}(t)-f^*(t)),$$
$$\|f_1\|_\infty\leqslant t f^*(t).$$

根据Hardy-Littlewood极大函数的弱(1,1)型，有

$$\begin{aligned}(M(f))^*(t) &\leqslant (M(f_0))^*(t) + \|f_1\|_\infty\\ &\leqslant 3^n t^{-1}\|f_0\|_1 + \|f_1\|_\infty\\ &\leqslant 3^n f^{**}(t).\end{aligned}$$

引理2.2 设$f\in L\log L$，$\operatorname{supp} f\subset Q$，则

$$\|R_j(f)\|_1\leqslant C\left(\int_Q |f(x)|\log(2+|f(x)|)\mathrm{d}x + |Q|\right),$$

其中R_j是Riesz变换，C与f,Q无关.

证明 对任意α，分解$f=g+h$，其中

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E_\alpha\\ 0\ , & \text{其它},\end{cases}$$

这里的$E_\alpha=\{x\in\boldsymbol{R}^n:|f(x)|>\alpha\}$.用$R_j$的弱(1,1)型与(2,2)型，有

$$
\begin{aligned}
|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |R_j(f)(x)|>\lambda\}| &\leqslant |\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |R_j(g)(x)|>\lambda/2\}| \\
&\quad + |\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |R_j(h)(x)|>\lambda/2\}| \\
&\leqslant \frac{C\|g\|_1}{\lambda} + C\frac{\|h\|_2^2}{\lambda^2} \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{E_\alpha}|f|\,\mathrm{d}x + \frac{C\alpha^2}{\lambda^2}|Q|.
\end{aligned}
$$

取$0<r<\frac{1}{2}$，$\alpha=\lambda^r$，则

$$
\begin{aligned}
\|R_j(f)\|_1 &= \left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |R_j(f)(x)|>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant |Q| + C\int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\int_{E(\lambda^r)}|f(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda \\
&\quad + C\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{2-2r}}|Q| \\
&\leqslant C|Q| + C\int_Q |f(x)|\int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\chi_{E(\lambda^r)}(x)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C|Q| + C\int_Q |f(x)|\int_1^{|f(x)|^{1/r}}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C|Q| + C\int_Q |f(x)|\log|f(x)|^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\left(|Q| + \int_Q |f(x)|\log(2+|f(x)|)\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}
$$

定理2.4 设$f\in L\log L+L^\infty$，则

$$
t^{-1}K(t,f;H^1,L^\infty)\leqslant Ct^{-1}\int_0^t f^{**}(s)\,\mathrm{d}s.
$$

证明 由于Riesz变换与展缩可交换，以及

$$
\|f\|_{H^1}\sim\|f\|_1+\sum_{j=1}^n\|R_j(f)\|_1,
$$

故只需对$t=1$证明引理即可。也就是说，设

$$\int_0^1 f^{**}(s)\,\mathrm{d}s\leqslant 1,$$

只要证明

$$K(1,f;H^1,L^\infty)\leqslant C. \tag{2.4}$$

对$f\in L\log L+L^\infty$，记

$$\Omega=\{x\in R^n;\ M(f)(x)>(Mf)^*(1)\}.$$

显然，$|\Omega|\leqslant 1$。对Ω作Whitney分解：$\Omega=\bigcup Q_j$，Q_j互不相叠，且$(\beta Q_j)\cap\Omega^c\neq\varnothing$，其中$\beta=10n^{1/2}$。记$F=\Omega^c$。令

$$g=\sum_k[f-m_{Q_k}f]\chi_{Q_k},$$

$$h=\sum_k m_{Q_k}f\chi_{Q_k}+f\chi_F.$$

由$\beta Q_k\cap F\neq\varnothing$，以及引理2.1，知

$$\begin{aligned}|m_{Q_k}f|&\leqslant m_{Q_k}|f|\leqslant\beta^n(Mf)^*(1)\\&\leqslant 3^n\beta^n\int_0^1 f^*(s)\,\mathrm{d}s\\&\leqslant 3^n\beta^n\int_0^1 f^{**}(s)\,\mathrm{d}s\leqslant(3\beta)^n.\end{aligned}$$

类似地

$$\|f\chi_F\|_\infty\leqslant\|(M(f))\chi_F\|_\infty\leqslant(M(f))^*(1)\leqslant 3^n.$$

因此

$$\|h\|_\infty\leqslant(3\beta)^n.$$

为估计g的H^1模，首先注意

$$g^{**}(s)\leqslant Cf^{**}(s),\qquad 0<s<1. \tag{2.5}$$

这是因为，如果E是Ω的任意子集，$|E|=t$，$0<t<1$，则

$$\int_E|g|\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_k\int_{E\cap Q_k}|f-m_{Q_k}f|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_k \int_{E\cap Q_k} |f|\,\mathrm{d}x + \sum_k |E\cap Q_k|\beta^n m_{\beta Q_k}|f|$$

$$\leqslant \int_E |f|\,\mathrm{d}x + |E|(3\beta)^n f^{**}(1)$$

$$\leqslant \int_0^t f^*(s)\,\mathrm{d}s + t(3\beta)^n f^{**}(t),$$

对$|E|=t$取上确界，便得(2.5)，其中$C=(3\beta)^n+1$。应用引理2.2到函数$g\chi_{Q_k}$，得到

$$\|g\|_{H^1} \leqslant \|g\|_1 + \sum_{j=1}^n \sum_k \|R_j(g\chi_{Q_k})\|_1$$

$$\leqslant \|g\|_1 + C\sum_k \left\{\int_{Q_k} |g(x)|\log(2+|g(x)|)\,\mathrm{d}x + Q_k\right\}$$

$$\leqslant \|g\|_1 + C\int_\Omega |g(x)|\log(2+|g(x)|)\,\mathrm{d}x + |\Omega|.$$

由于$|\Omega|\leqslant 1$以及显然的不等式

$$\int_\Omega |g(x)|\log(2+|g(x)|)\,\mathrm{d}x \leqslant \|g\|_1\log(2+\|g\|_1) + \int_0^1 g^{**}(s)\,\mathrm{d}s,$$

便有

$$\|g\|_{H^1} \leqslant C\|g\|_1\log(2+\|g\|_1) + \int_0^1 g^{**}(s)\,\mathrm{d}s.$$

而

$$\|g\|_1 = \int_0^1 g^*(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 g^{**}(s)\,\mathrm{d}s,$$

故得$\|g\|_{H^1}\leqslant C$，从而证得2.4。

推论2.2 若$0<\theta<1$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则

$$(H^1, L^\infty)_{\theta,q} = L_{pq},$$

其中$\theta=1-1/p$。

证明 定理2.4表明$L_{pq}\subset(H^1,L^\infty)_{\theta,q}$。反过来的包含关系是显然的，因为由$H^1\subset L^1$且$\|f\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{H^1}$，知$K(t,f;L^1,L^\infty)\leqslant CK(t,f;H^1,L^\infty)$，再应用定理2.3。

下面讨论L^1与BMO的内插空间。这时，我们需要Sharp函数$f^\#$。

定理2.5 存在常数C_1,C_2，使得

$$C_1t(f^\#)^*(t)\leqslant K(t,f;L^1,\mathrm{BMO})\leqslant C_2t(f^\#)^*(t)$$

对所有$f\in(L^1+\mathrm{BMO})(\boldsymbol{R}^n)$与$t>0$成立，其中$f^\#$表示Fefferman-Stein的sharp函数：

$$f^\#(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-m_Qf|\,\mathrm{d}y,$$

g^*表示g的非增重排函数。

证明 若$f=g+h$，$g\in L^1$，$h\in\mathrm{BMO}$，则

$$f^\#\leqslant g^\#+h^\#\leqslant g^\#+\|h\|_*.$$

因此，

$$\begin{aligned}t(f^\#)^*(t)&\leqslant t(g^\#)^*(t)+t\|h\|_*\\&\leqslant 2t(M(g))^*(t)+t\|h\|_*\\&\leqslant C(\|g\|_1+t\|h\|_*),\end{aligned}$$

对分解$f=g+h$取下确界，便得所要证明的第一个不等式。

第二个不等式的证明要困难得多。固定$f\in L^1+\mathrm{BMO}$与$t>0$。令

$$\Omega=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ f^\#(x)>(f^\#)^*(t)\}.$$

这时Ω是开集且$|\Omega|\leqslant t$。记$F=\Omega^c$。对Ω作二进Whitney分解：$\Omega=\bigcup Q_j$，Q_j是互不重叠的二进方体，且

$$\operatorname{diam}Q_j\leqslant\operatorname{dist}(Q_j,F)\leqslant 4\operatorname{diam}Q_j.$$

对固定的j_0，记$J_0=\{j:\ Q_j\cap Q_{j_0}\neq\varnothing\}$。由§1.2引理2.1知

$$\frac{1}{4}\operatorname{diam} Q_{j_0} \leqslant \operatorname{diam} Q_j \leqslant 4 \operatorname{diam} Q_{j_0}, \qquad j \in J_0.$$

因此

$$\frac{3}{2} Q_{j_0} \subset \bigcup_{j \in J_0} Q_j \subset 9 Q_{j_0}. \tag{2.6}$$

记

$$g(x) = \sum_j [f(x) - m_{Q_j} f] \chi_{Q_j}(x),$$

$$h(x) = \sum_j m_{Q_j} f \cdot \chi_{Q_j}(x) + f(x) \chi_F(x).$$

取$\beta = 10 n^{1/2}$，则$Q'_j \cap F \neq \varnothing$，其中$Q'_j = \beta Q_j$。注意在$F$上，$f^{\#}(x) \leqslant (f^{\#})^*(t)$，故

$$\begin{aligned} \|g\|_1 &= \sum_j |Q_j| m_{Q_j}(|f - m_{Q_j} f|) \\ &\leqslant 2\beta^n (f^{\#})^*(t) \sum_j |Q_j| \\ &\leqslant 2\beta^n t (f^{\#})^*(t). \end{aligned}$$

下面我们要证$\|h\|_* \leqslant C(f^{\#})^*(t)$。为此，只需证明，对任意方体$Q$，存在$a = a_Q$，使得

$$A(Q) = m_Q(|h - a|) \leqslant C(f^{\#})^*(t).$$

对任意Q，记$K = \{k: Q_k \cap Q \neq \varnothing\}$。注意到在每个$Q_k$，$h$取常数值$m_{Q_k} f$。因此

$$A(Q) = \sum_{k \in K} \frac{|Q_k \cap Q|}{|Q|\ |Q_k|} \left| \int_{Q_k} (f - a) \mathrm{d}x \right| + \frac{1}{|Q|} \int_F |f - a| \mathrm{d}x.$$

考虑下面的三种情形：

(1) K是空集。这时$Q \subset F$，取$a = m_Q f$，则有

$$A(Q) \leqslant m_Q(|f - m_Q f|) \leqslant (f^{\#})^*(t).$$

(2) K不是空集但存在$j_0 \in K$，使得

$$\operatorname{diam} Q<\frac{1}{4}\operatorname{diam} Q_{j_0}. \tag{2.7}$$

因此 $Q\subset\frac{3}{2}Q_{j_0}$. 由(2.6)知$Q\cap F=\varnothing$. 事实上，这时$K\subset J_0$，也就是说，每个与$Q$有重叠的$Q_k$，必然与$Q_{j_0}$也有重叠. 这是因为由(2.7)知$Q$在$\frac{3}{2}Q_{j_0}$的内部，且与它的边界有正的距离. 故当$k\in K$时，$Q_k$与$Q$有重叠，从而与$\frac{3}{2}Q_{j_0}$交于一正测度集合. 由(2.6)知$Q_k$必与某个$Q_j(j\in J_0)$交于一正测度集合. 由Whitney分解的性质，得$Q_k=Q_j$，即$K\subset J_0$. 记$Q_0'=\beta Q_{j_0}$，$\beta=10n^{1/2}$，取$a=m_{Q_0'}f$. 则

$$\begin{aligned}
A(Q)&\leqslant\sum_{j\in J_0}\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)-m_{Q_0'}f|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{4^n}{|Q_{j_0}|}\sum_{j\in J_0}\int_{Q_j}|f(x)-m_{Q_0'}f|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant(4\beta)^n m_{Q_0'}(|f-m_{Q_0'}f|)\\
&\leqslant(4\beta)^n(f^{\#})^*(t).
\end{aligned}$$

(3) K不是空集，但对任意$k\in K$，有

$$\frac{1}{4}\operatorname{diam} Q_k\leqslant\operatorname{diam} Q.$$

这时

$$\bigcup_{k\in K}Q_k\subset 9Q.$$

因此$\tilde{Q}=9\beta Q$与F相交非空. 取$a=m_{\tilde{Q}}f$，有

$$A(Q)\leqslant\frac{1}{|Q|}\left(\sum_{k\in K}\int_{Q_k}|f-a|\,\mathrm{d}x+\int_{Q\cap F}|f-a|\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}}|f(x)-a|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (9\beta)^n (f^{\#})^*(t).$$

于是，我们证明了，存在分解$f=g+h$，$g\in L^1, h\in \mathrm{BMO}$，使得

$$\|g\|_1+t\|h\|_*\leqslant Ct(f^{\#})^*(t),$$

这就得到了第二个不等式．定理2.5得证．

下面我们还需进一步刻画中间空间$(L_1,\mathrm{BMO})_{\theta q}$．

引理2.3 设Ω是Q_0内的相对开子集，$|\Omega|\leqslant|Q_0|/2$．则存在互不重叠的方体列Q_j满足：

(i) $|\Omega\cap Q_j|\leqslant \frac{1}{2}|Q_j|\leqslant|\Omega^c\cap Q_j|$;

(ii) $\Omega\subset \bigcup_j Q_j\subset Q_0$;

(iii) $|\Omega|\leqslant\sum|Q_j|\leqslant 2^{n+1}|\Omega|$.

证明 对任意$x\in\Omega$，选择包含x的方体$Q(x)$如下．首先，$x\in Q_0$，且

$$|\Omega\cap Q_0|\leqslant|Q_0|/2\leqslant|\Omega^c\cap Q_0|.$$

逐次2^n等分Q_0，取$Q(x)$为第一次出现的子方体，它包含x，且满足

$$|\Omega\cap Q(x)|\leqslant\frac{1}{2}|Q(x)|\leqslant|\Omega^c\cap Q(x)|,$$

而它的下一代2^n个子方体$Q'(x)$都满足

$$|\Omega\cap Q'(x)|>\frac{1}{2}|Q'(x)|=2^{-n-1}|Q(x)|.$$

由于Ω相对于Q_0是开的，上述$Q(x)$存在．记$K=\{Q(x):x\in\Omega\}$．显然K中的方体，要么不重叠，要么一个包含另一个．取K中全体极大方体，它构成引理所要求的Q_j．显然性质(i)，(ii)与(iii)

的第一个不等式成立。而由

$$2^{-n-1}\sum_{j}|Q_j|\leqslant\sum_{j}|\Omega\cap Q'_j|\leqslant\sum|\Omega\cap Q_j|\leqslant|\Omega|$$

知(iii)的第二个不等式也成立。

引理2.4 设 f 是支于 Q_0 上的可积函数，则

$$f^{**}(t)-f^{*}(t)\leqslant C(f^{\#}_{Q_0})^{*}(t),\quad 当\ 0<t<|Q_0|/6.$$

其中

$$f^{\#}_{Q_0}(x)=\sup_{\substack{Q\subset Q_0\\ x\in Q}}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(y)-m_Qf|\,\mathrm{d}y.$$

证明 由 $|f|^{\#}_{Q_0}\leqslant f^{\#}_{Q_0}$ 知，不妨假定 f 是非负的。令

$$E=\{x\in Q_0:f(x)>f^{*}(t)\},$$
$$F=\{x\in Q_0:f^{\#}_{Q_0}(x)>(f^{\#}_{Q_0})^{*}(t)\}.$$

显然 $|E|\leqslant t$，$|F|\leqslant t$。因此，存在 Q_0 的开集 Ω，使得 $E\cup F\subset\Omega\subset Q_0$，而且 $|\Omega|\leqslant 3t\leqslant|Q_0|/2$。由引理2.3知存在 $Q_1,Q_2,\cdots$，互不重叠，具有性质(i)，(ii)，(iii)。这样

$$\begin{aligned}
t\{f^{**}(t)-f^{*}(t)\}&=\int_{E}(f(x)-f^{*}(t))\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{j}\int_{E\cap Q_j}(f(x)-f^{*}(t))\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant\sum\int_{Q_j}|f-m_{Q_j}|\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\sum_{j}|E\cap Q_j|(m_{Q_j}f-f^{*}(t))\\
&=A+B.
\end{aligned}$$

记 $J=\{j:m_{Q_j}f>f^{*}(t)\}$。则

$$B \leqslant \sum_{j \in J} |E \cap Q_j| (m_{Q_j} f - f^*(t))$$

$$\leqslant \sum_{j \in J} |\Omega \cap Q_j| (m_{Q_j} f - f^*(t)).$$

根据(i)，并注意到，在 Ω^c 有 $f(u) \leqslant f^*(t)$，知

$$B \leqslant \sum_{j \in J} \int_{\Omega^c \cap Q_j} (m_{Q_j} f - f(u)) \mathrm{d}u$$

$$\leqslant \sum \int_{Q_j} |m_{Q_j} f - f(u)| \mathrm{d}u$$

$$\leqslant A.$$

故

$$t(f^{**}(t) - f^*(t)) \leqslant 2A.$$

由于每个 Q_j 均与 F^c 相交非空，设 $x_j \in Q_j \cap F^c$. 于是

$$A \leqslant \sum_j |Q_j| f^{\#}_{Q_j}(x_j) \leqslant \sum_j (f^{\#}_{Q_0})^*(t)$$

$$\leqslant 2^{n+1} |\Omega| (f^{\#}_{Q_0})^*(t) \leqslant 2^{n+1}(3t)(f^{\#}_{Q_0})^*(t).$$

引理2.5 设 f 在 Q_0 可积，$0 < t \leqslant |Q_0|/6$，则

$$[(f - m_{Q_0} f)\chi_{Q_0}]^{**}(t) \leqslant C \int_t^{|Q_0|} (f^{\#}_{Q_0})^*(s) \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

证明 记 $g = (f - m_{Q_0} f)\chi_{Q_0}$. 引理2.4说明

$$g^{**}(s) - g^*(s) \leqslant C (g^{\#}_{Q_0})^*(s) \quad (0 < s < |Q_0|/6).$$

由定义 $tg^{**}(t) = \int_0^t g^*(s) \mathrm{d}s$ 与 Newton-Leibniz 公式，得

$$g^{**}(t) - g^{**}(u) = \int_t^u (g^{**}(s) - g^*(s)) \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

因此，当 $0 < t \leqslant u \leqslant |Q_0|/6$，

$$g^{**}(t)-g^{**}(u)\leqslant C\int_t^u (g_{Q_0}^{\#})^*(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

取 $u=|Q_0|/6$. 由

$$g^{**}\left(\frac{|Q_0|}{6}\right)\leqslant\frac{6}{|Q_0|}\int_0^{Q_0} g^*(s)\mathrm{d}s=6m_{Q_0}|g|,$$

有

$$g^{**}(t)\leqslant C\left\{\int_t^{|Q_0|}(g_{Q_0}^{\#})^*(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}+m_{Q_0}|g|\right\}.$$

由定义知 $m_{Q_0}|g|\leqslant f_{Q_0}^{\#}(y)$，只要 $y\in Q_0$。故

$$m_{Q_0}|g|\leqslant C\int_{|Q_0|/6}^{|Q_0|}(f_{Q_0}^{\#})^*(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

这就证明了引理2.5.

引理2.6 若 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，且

$$\int_1^\infty (f^{\#})^*(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}<\infty,$$

则极限

$$f_\infty=\lim_{|Q|\to\infty} m_Q f$$

存在.

证明 设 Q_k 是中心在原点，边长为 2^k 的方体. 由引理 2.5 知

$$\begin{aligned}m_{Q_{k+1}}f-m_{Q_k}f&=[(m_{Q_{k+1}}f-m_{Q_k}f)\chi_{Q_k}]^{**}\left(\frac{|Q_k|}{6}\right)\\&\leqslant[(f-m_{Q_k}f)\chi_{Q_k}]^{**}\left(\frac{|Q_k|}{6}\right)\\&\quad+[(f-m_{Q_{k+1}}f)\chi_{Q_{k+1}}]^{**}\left(\frac{|Q_k|}{6}\right)\\&\leqslant C\left(\int_{|Q_k|/6}^{|Q_k|}+\int_{|Q_k|/6}^{|Q_{k+1}|}\right)f^{**}(s)\frac{\mathrm{d}s}{s},\end{aligned}$$

故 $m_{Q_k}f$ 是 Cauchy 列。因此 $\lim\limits_{k\to\infty} m_{Q_k}f$ 存在。

对任意 $\varepsilon>0$。设M充分大，使得

$$C\int_{M/2}^{\infty} f^{**}(s)\frac{ds}{s}<\varepsilon/3.$$

对任意方体Q，$|Q|>M$，选 Q_k 使 $|Q_k|>M$ 且 $|m_{Q_k}f-f_\infty|<\varepsilon/3$。取 Q' 是包含Q与Q_k的方体，则

$$\begin{aligned}|m_Qf-f_\infty|&\leqslant|m_Qf-m_{Q'}f|+|m_{Q'}f-m_{Q_k}f|\\&\quad+|m_{Q_k}f-f_\infty|\\&\leqslant C\left(\int_{|Q|}^{\infty}+\int_{|Q_k|}^{\infty}\right)f^{**}(s)\frac{ds}{s}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.\end{aligned}$$

引理2.7 若 $f\in L_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，且

$$\int_1^{\infty} f^{**}(s)\frac{ds}{s}<\infty,$$

则

$$(f-f_\infty)^{**}(t)\leqslant C\int_t^{\infty} f^{**}(s)\frac{ds}{s}.$$

证明 已知只要$|Q|$充分大，就有$|m_Qf-f_\infty|<\varepsilon$，因而

$$\begin{aligned}[(f-f_\infty)\chi_Q]^{**}(t)&\leqslant[(f-f_Q)\chi_Q]^{**}(t)+|m_Qf-f_\infty|\\&\leqslant C\int_t^{\infty} f^{**}(s)\frac{ds}{s}+\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $Q\uparrow\boldsymbol{R}^n$，由

$$[(f-f_\infty)\chi_Q]^{**}(t)\uparrow(f-f_\infty)^{**}(t)$$

以及 ε 的任意性，知引理2.7成立。

由于BMO的元素是相差常数的等价类，因此内插空间 $(L^1,\text{BMO})_{\theta q}$ 也由相差常数的等价类组成。

定理2.6 设$0<\theta<1$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则

$$(L^1, \mathrm{BMO})_{\theta q} = L_{pq}, \quad \theta = 1 - \frac{1}{p}.$$

准确地说，对内插空间$(L^1, \mathrm{BMO})_{\theta q}$的每个元素$F$，存在$L_{pq}$的唯一元素$f$，使得

$$C_1 \|f\|_{pq} \leqslant \|F\|_{(L^1, \mathrm{BMO})_{\theta q}} \leqslant C_2 \|f\|_{pq},$$

其中C_1, C_2与f, F无关.

证明 设$F \in (L^1, \mathrm{BMO})_{\theta q}$，则当$q < \infty$时，

$$\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, F; L^1, \mathrm{BMO})]^q \frac{dt}{t} < \infty.$$

$q = \infty$的情形只需作明显的改动．由定理2.5知

$$\int_1^\infty (F^\#)^*(t) \frac{dt}{t} < \infty.$$

根据引理2.6，对等价类F中的每个f，$f_\infty = \lim\limits_{|Q| \to \infty} m_Q f$存在．选择$f$使得$f_\infty = 0$。再由引理2.7知

$$f^{**}(t) \leqslant C \int_t^\infty (F^\#)^*(s) \frac{ds}{s} \quad (0 < t < \infty).$$

注意到$0 < \theta < 1$，由Hardy不等式便推知引理的第一个不等式成立。

反过来，若$f \in L_{pq}$，F属于f的等价类$(F = f + C)$，则由$F^\#(x) \leqslant 2M(f)(x)$知

$$(F^\#)^*(t) \leqslant C f^{**}(t).$$

再用Hardy不等式便推得定理的第二个不等式成立。

推论2.3 设$0 < \theta < 1$，$1 \leqslant q \leqslant \infty$，则

$$(H^1, \mathrm{BMO})_{\theta q} = L_{pq}, \quad \theta = 1 - \frac{1}{p}.$$

证明 推论2.2与定理2.6已证明了

$$(H^1, L^\infty)_{\theta q} = L_{pq} = (L^1, \mathrm{BMO})_{\theta q}, \quad 0 < \theta < 1, \ 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

其中$\theta = 1 - \frac{1}{p}$. 但我们知道 $L^\infty \hookleftarrow \text{BMO}$, $H^1 \hookrightarrow L^1$, 故

$$(H^1, L^\infty)_{\theta q} \subseteq (H^1, \text{BMO})_{\theta q} \subseteq (L^1, \text{BMO})_{\theta q},$$

这样就得到了推论的结论。

§ 8.3 H^p 空间的内插空间(复方法)

记

$$\bar{A} = (A_0, A_1), \quad \sum(\bar{A}) = A_0 + A_1,$$

$$\|f\|_{\Sigma(\bar{A})} = \inf_{f = f_0 + f_1} (\|f_0\|_{A_0} + \|f_1\|_{A_1}),$$

$$S = \{z \in \boldsymbol{C}: 0 < \text{Re} z < 1\}, \ \bar{S} \text{是} S \text{的闭包}.$$

令

$$\mathscr{F}(\bar{A}) = \{F(z) \mid F: \bar{S} \to \sum(\bar{A}), \text{ 在} S \text{解析, 在} \bar{S} \text{连续}\}.$$

进一步还要求，$t \to F(j + it)$是R到A_j的连续函数，且当$|t| \to \infty$时，$F(j + it) \to 0$，$j = 0, 1$。显然，$\mathscr{F}(\bar{A})$是向量值函数空间。定义范数

$$\|F\|_{\mathscr{F}} = \max\{\sup_t \|F(it)\|_{A_0}, \sup_t \|F(1 + it)\|_{A_1}\}. \quad (3.1)$$

利用解析函数的最大模原理与收敛性质，不难证明，当A_0, A_1是 Banach 空间时，$\mathscr{F}(\bar{A})$也是 Banach 空间.

定义3.1

$$[A_0, A_1]_\theta = \{f \mid f \in \sum(\bar{A}), \text{存在 } F \in \mathscr{F}(\bar{A}), \text{ 使得 } F(\theta) = f\},$$

其中 $0 < \theta < 1$，并且定义$[A_0, A_1]_\theta$ 的范数为

$$\|f\|_\theta = \inf_{\substack{F \in \mathscr{F} \\ F(\theta) = f}} \|F\|_{\mathscr{F}}.$$

定理3.1 若 A_0, A_1 是 Banach 空 间，则$[A_0, A_1]_\theta$ 是 Banach 空间，并且它是 A_0, A_1 的内插空间，即当次线性算子分别在 A_0, A_1 有界时，则它必在$[A_0, A_1]_\theta$ 有界。

证明 由 于$\|F(\theta)\|_{\Sigma(\bar{A})} \leqslant \|F\|_{\mathscr{F}}$，线 性 映 射 $F \to F(\theta)$是 由

$\mathscr{F}(\bar{A})$到$\sum(\bar{A})$连续的．令

$$\mathscr{N}_\theta=\{F \mid \in \mathscr{F}(\bar{A}), F(\theta)=0\},$$

则$[A_0,A_1]_\theta$与商空间$\mathscr{F}(\bar{A})/\mathscr{N}_\theta$同构、等距．再由$\mathscr{N}_\theta$是闭的，推出$[A_0,A_1]$是 Banach 空间．

设T是在A_j有界的次可加算子，且$\|T(f)\|_{A_j}\leqslant M_j\|f\|_{A_j}$，$j=0,1$。对$f\in[A_0,A_1]_\theta$与任意$\varepsilon>0$，存在$F\in\mathscr{F}(\bar{A})$，使得$F(\theta)=f$，且$\|F\|_{\mathscr{F}}\leqslant\|f\|_\theta+\varepsilon$。令

$$G(z)=M_0^{z-1}M_1^{-z}T(F(z)),$$

则$G\in\mathscr{F}(\bar{A})$，$\|G\|_{\mathscr{F}}\leqslant\|F\|_{\mathscr{F}}\leqslant\|f\|_\theta+\varepsilon$。但$G(\theta)=M_0^{\theta-1}M_1^{-\theta}T(f)$，故

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_\theta&\leqslant\|M_0^{1-\theta}M_1^\theta G(\theta)\|_\theta\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|G\|_{\mathscr{F}}\\&\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta(\|f\|_\theta+\varepsilon).\end{aligned}$$

由ε任意小，知$\|T(f)\|_\theta\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|f\|_\theta$。定理3.1获证．

当A_0,A_1是拟 Banach 空间时，在定义$F\in\mathscr{F}$中，加上当$|z|\to\infty$时$F(z)\to0$的条件，且定义

$$\|F\|_{\mathscr{F}}=\sup_{\substack{-\infty<t<\infty\\ z\in S}}\{\|F(it)\|_{A_0},\|F(1+it)\|_{A_1},\|F(z)\|_{\Sigma(\bar{A})}\},$$

同样可以证明，$[A_0,A_1]_\theta$是A_0,A_1的内插空间．说明这一点的意义在于，H^p当$p<1$时只是一个拟 Banach 空间。

本节要证明的基本结果是下面的定理：

定理3.2 设$0<p_0<\infty$，$0<\theta<1$，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}$，则

$$[H^{p_0},L^\infty]_\theta=H^p.$$

在这里，显然约定当$p>1$时，$H^p=L^p$。

为证明定理3.2，需要一连串的引理．

引理3.1 设$0<p_0<p<\infty$，$f\in H^p$，则

$$f=\sum_{k,j}a_j^k,$$

这里a_j^k满足：

$$\operatorname{supp} a_j^k \subset \tilde{Q}_j^k \subset \Omega_k, \tag{3.2}$$

$$\Omega_k = \{x \in \boldsymbol{R}^n ; G^*(f)(x) > 2^k\},$$

$$\sum_j |a_j^k| \leqslant C_{p_0} 2^k \chi_{\Omega_k}, \tag{3.3}$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} x^\alpha a_j^k(x) \mathrm{d}x = 0, \quad \text{当 } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant N(p_0), \tag{3.4}$$

其中 $G^*(f)$ 是 f 的大极大函数(grand maximal function)，$\tilde{Q}_j^k = \frac{6}{5} Q_j^k$，$Q_j^k$ 是 Ω_k 的 Whitney 方体。

证明 对 Ω_k 作 Whitney 分解（见预备知识 §1.2），得二进方体集合 Q_j^k 以及光滑函数 φ_j^k，具有下列性质：

(i) $\Omega_k = \bigcup_j Q_j^k$，$\mathring{Q}_j^k \cap \mathring{Q}_l^k = \varnothing$；

(ii) $\chi_{\Omega_k} = \sum_j \varphi_j^k$，$\varphi_j^k \geqslant 0$；

(iii) $\operatorname{dist}(\boldsymbol{R}^n \backslash \Omega_k, Q_j^k) \sim \operatorname{diam} Q_j^k \equiv d_j^k$。若 x_j^k 是 Q_j^k 的中心，则存在 $y_j^k \in \boldsymbol{R}^n \backslash \Omega_k$，满足 $|y_j^k - x_j^k| < 10 d_j^k$，且 $f^*(y_j^k) \leqslant 2^k$；

(iv) $\sum \chi_{Q_j^k} \leqslant M \chi_{\Omega_k}$，其中 M 只与维数 n 有关；

(v) $\operatorname{supp} \varphi_j^k \subset \frac{6}{5} Q_j^k$，且 $\varphi_j^k(x) \geqslant C > 0$ 当 $x \in Q_j^k$；

(vi) $\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \varphi_j^k(x) \right\|_\infty \leqslant C_\alpha (d_j^k)^{-|\alpha|}$。

记 P_j^k 为 $N(p_0)$ 次多项式，使得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (f(x) - P_j^k(x)) \varphi_j^k(x) x^\alpha \mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant N(p_0).$$

这样，我们得到分解 $f = g_k + b_k$，其中

$$g_k = f \chi_{\boldsymbol{R}^n \backslash \Omega_k} + \sum_j P_j^k \varphi_j^k,$$

$$b_k = \sum_j (f - P_j^k) \varphi_j^k.$$

我们需要 P_j^k 的一个估计

$$\sup_{y\in\tilde{Q}_j^{k+1}}|P_j^{k+1}(y)|\leqslant C2^{k+1}. \tag{3.5}$$

这个估计的证明留待以后。由(3.5)易知

$$\sup_{y\in R^n}|P_i^{k+1}(y)\varphi_i^{k+1}(y)|\leqslant C2^{k+1}.$$

根据这些估计，知 $\|g_k\|_\infty\leqslant C2^k$。因此，当 $k\to-\infty$ 时，$g_k\to 0$ a.e.。而由 $\operatorname{supp} b_k\subset\Omega_k$，知当 $k\to\infty$ 时，$b_k\to 0$ a.e.。故

$$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(g_{k+1}-g_k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(b_k-b_{k+1})$$

$$=\sum_k\left[\sum_j(f-P_j^k)\varphi_j^k-\sum_l(f-P_l^{k+1})\varphi_l^{k+1}\right].$$

注意到 $\operatorname{supp}\varphi_l^{k+1}\subset\Omega_{k+1}\subset\Omega_k$，$\sum_i\varphi_i^k=\chi_{\Omega_k}$，有

$$f=\sum_k\sum_j\left[(f-P_j^k)\varphi_j^k-\sum_l(f-P_l^{k+1})\varphi_j^k\varphi_l^{k+1}\right].$$

显然

$$\int_{R^n}(f-P_j^k)\varphi_j^k x^\alpha\mathrm{d}x=0,\qquad 当|\alpha|\leqslant N(p_0),$$

但 $\int_{R^n}(f-P_l^{k+1})\varphi_j^k\varphi_l^{k+1}x^\alpha\mathrm{d}x$ 未必为0。故需再用正交分解。与 P_j^k 同理，存在唯一的次数不超过 $N(p_0)$ 的多项式 $P_{j,l}^{k+1}$，使得当 $|\alpha|\leqslant N(p_0)$ 时，

$$\int_{R^n}(f-P_l^{k+1})\varphi_j^k\varphi_l^{k+1}x^\alpha\mathrm{d}x=\int P_{j,l}^{k+1}\varphi_l^{k+1}x^\alpha\mathrm{d}x$$

且

$$|P_{j,l}^{k+1}\varphi_l^{k+1}|\leqslant C2^{k+1}.$$

注意到 $\sum_j\varphi_j^k=\chi_{\Omega_k}$，$\operatorname{supp}\varphi_l^{k+1}\subset\Omega_{k+1}\subset\Omega_k$，当 $|\alpha|\leqslant N(p_0)$ 时有

$$\int_{R^n}\sum_j P_{j,l}^{k+1}\varphi_l^{k+1}x^\alpha\,dx$$

$$=\int_{R^n}(f-P_l^{k+1})\sum_j\varphi_j^k\varphi_l^{k+1}x^\alpha\,dx$$

$$=\int_{R^n}(f-P_l^{k+1})\varphi_l^{k+1}x^\alpha\,dx=0,$$

故$\sum_j P_{j,l}^{k+1}=0$，从而 $\sum_j\sum_l P_{j,l}^{k+1}\varphi_l^{k+1}=0$。记

$$a_j^k=(f-P_j^k)\varphi_j^k-\sum_l[(f-P_l^{k+1})-P_{j,l}^{k+1}]\varphi_l^{k+1},$$

则我们已证得$f=\sum_{k,j}a_j^k$。显然，a_j^k满足（3.4）。若$\mathrm{supp}\varphi_j^k\cap\mathrm{supp}\varphi_l^{k+1}\neq\varnothing$，注意到$\mathrm{supp}\,\varphi_j^k\subset\frac{6}{5}Q_j^k$，由二进方体的性质知$\mathrm{supp}\varphi_l^{k+1}\subset\tilde{Q}_j^k$。若$\mathrm{supp}\varphi_j^k\cap\mathrm{supp}\varphi_l^{k+1}=\varnothing$，则$P_{j,l}^{k+1}=0$。故都有(3.2)成立。由于

$$a_j^k=f\varphi_j^k\chi_{\Omega_{k+1}^c}-P_j^k\varphi_j^k$$

$$+\varphi_j^k\sum_l P_l^{k+1}\varphi_l^{k+1}+\sum_l P_{j,l}^{k+1}\varphi_l^{k+1},$$

应用(3.5)，便得到$|a_j^k|\leqslant C2^k$，从而

$$\sum_j|a_j^k|\leqslant C2^k\sum_j\chi_{\tilde{Q}_j^k}\leqslant C_{p_0}2^k\chi_{\Omega_k},$$

这就是(3.3)。

为证明(3.5)，需要下面的引理。

引理3.2 设$\{\pi_j\}_{j=1}^{\mathscr{N}}$为$s$次多项式全体$\mathscr{P}$。关于Hilbert空间范数

$$\|P\|=\frac{\int_{R^n}|P(x)|^2\varphi_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_{R^n}\varphi_j^{k+1}(x)\mathrm{d}x}$$

的标准正交基，其中 $\mathscr{L}=\dim\mathscr{P}_s$。则

(i) $\sup\limits_{y\in Q_j^{k+1}}|(d_j^{k+1})^{|\alpha|}\mathrm{D}^\alpha\pi_i(y)|\leqslant C$,

(ii) $\sup\limits_{\substack{y\in R^n\\|\alpha|\leqslant N}}|(d_j^{k+1})^{|\alpha|}\mathrm{D}^\alpha(\pi_i(y)\varphi_j^{k+1}(y))|\leqslant C$,

其中 C 与 k,i,j 无关，φ_j^k,d_j^k 等的意义，如在引理3.1证明中所说明的。

引理3.2的证明 显然，(ii)是(i)的直接推论，而(i)本质上就是第六章§6.1中的(1.7)式。

式(3.5)的证明 已知

$$P_j^{k+1}(y)=\sum_{i=1}^{\mathscr{L}}\frac{\int_{R^n}f\pi_i\varphi_j^{k+1}\mathrm{d}x}{\int_{R^n}\varphi_j^{k+1}\mathrm{d}x}\pi_i(y).$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{\int_{R^n}f\pi_i\varphi_j^{k+1}\mathrm{d}x}{\int_{R^n}\varphi_j^{k+1}\mathrm{d}x}\\&=\left|\frac{(d_j^{k+1})^n}{\int_{R^n}\varphi_j^{k+1}\mathrm{d}x}\int_{R^n}f(y_j^{k+1}-d_j^{k+1}x)\pi_i(y_j^{k+1}-d_j^{k+1}x)\right.\\&\qquad\left.\times\varphi_j^{k+1}(y_j^{k+1}-d_j^{k+1}x)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{R^n}f(y_j^{k+1}-d_j^{k+1}x)\Phi^i(x)\mathrm{d}x\right|\\&=|\Phi_{d_j^{k+1}}*f(y_j^{k+1})|,\end{aligned}$$

其中

$$\Phi^i(x)=\frac{(d_j^{k+1})^n}{\int\varphi_j^{k+1}\mathrm{d}x}\pi_i(y_j^{k+1}-d_j^{k+1}x)\varphi_j^{k+1}(y_j^{k+1}-d_j^{k+1}x).$$

由于

$$|d_j^{k+1}x|-|y_j^{k+1}-x_i^{k+1}|\leqslant|(y_j^{k+1}-d_j^{k+1}x)-x_i^{k+1}|\leqslant 2d_i^{k+1},$$

以及

$$|y_j^{k+1}-x_i^{k+1}|\leqslant 10d_j^{k+1}$$

(引理3.1证明中的(iii)), 得$|x|\leqslant 12$, 即 $\mathrm{supp}\,\Phi^i\subset B(0,12)$. 由引理 3.2 的(ii), 知$\|\Phi^i\|_{\mathscr{A}}\leqslant C$, 其中$\mathscr{A}$是定义大极大函数的集合。再由 $G^*(y_j^{k+1})\leqslant 2^{k+1}$ 及引理 3.2 的(i), 便得$|P_i^{k+1}(y)|\leqslant C2^{k+1}$。这样便证明了(3.5), 从而完成了引理3.1的证明.

引理3.3 设 $F(x)=\sum\limits_{k=-N}^{\infty}\sum\limits_j a_j^k(x)$, 其中 $a_j^k(x)$ 如引理3.1所述, 则存在二进方体族$\{Q_j\}\subset\{Q_j^k: k>-N, j\in\boldsymbol{Z}\}$以及函数族$\{a_j\}$, $\mathrm{supp}\,a_j\subset\tilde{Q}_j=\frac{6}{5}Q_j$, 使得 $F(x)=\sum a_j$, 并且对每个 j, 存在整数 $m(j)$, 满足

$$\sum 2^{pm(j)}|Q_j|\leqslant C_p; \tag{3.6}$$

$$\text{如果 } Q_k\subset Q_j,\ k\neq j,\ \text{则 } m(k)>m(j)\text{且 } Q_k\subsetneqq Q_j; \tag{3.7}$$

$$\sum_{Q_k\subset Q_j}|Q_k|\leqslant 2|Q_j|; \tag{3.8}$$

$$\|a_j\|_\infty\leqslant C_{p_0}2^{m(j)}; \tag{3.9}$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}x^\alpha a_j(x)\mathrm{d}x=0,\quad |\alpha|\leqslant N(p_0). \tag{3.10}$$

另外, 如果A是任意有限指标集合, 则对每个x,存在$j(x)\in A$, 使得

$$\sum_{j\in A}|a_j(x)|\leqslant C_{p_0}2^{m(j(x))}\chi_{\tilde{Q}_{j(x)}}(x). \tag{3.11}$$

证明 我们应用"停时"方法. 如引理 3.1, Q_j^k 是 Ω_k 的

Whitney 二进方体。我们将归纳地定义$\{Q_j^k: k\geq -N\}$的子集合$W_t=\{R_s^t\}$以及相应的函数集合$\{A_s^t\}$和整数$m(t,s)$。首先由Whitney分解知，若Q_i^k是Ω_k中的二进方体，则存在Ω_{k-1}中的一个二进方体Q_m^{k-1}，使得$Q_j^k\subseteq Q_m^{k-1}$。令$W_1=\{R_s^1\}=\{Q_j^{-N}\}$。对每个$R_s^1\in W_1$，定义$m(1,s)$是$|R_s^1\cap\Omega_k|<\frac{1}{2}|R_s^1|$成立的最小整数，换言之，

$$|R_s^1\cap\Omega_{m(1,s)}|<\frac{1}{2}|R_s^1|\text{而}|R_s^1\cap\Omega_{m(1,s)-1}|\geq\frac{1}{2}|R_s^1|.$$

由于$f\in H^p$，$m(1,s)$不但存在，而且$m(1,s)>-N$。令$S(R_s^1)=\{Q_j^k\subseteq R_s^1: -N\leq k<m(1,s)\}$，$S_1=\bigcup_s S(R_s^1)$，$D_1=\{Q_j^k: k\geq -N\}\backslash S_1$。取$W_2$为$D_1$中全体极大二进方体构成的集合，其中称$Q_i^k$是$D_1$中极大二进方体，如果还有$Q_j^l\in D_1$，$Q_i^k$，$Q_j^l$内部相交非空，则$k<l$且$Q_j^l\subseteq Q_i^k$。对于每一$R_s^2\in W_2$，同样定义最小整数$m(2,s)$：$|R_s^2\cap\Omega_{m(2,s)}|<\frac{1}{2}|R_s^2|$。再令$S(R_s^2)=\{Q_j^k\subseteq R_s^2: Q_j^k\in D_1, k<m(2,s)\}$，$S_2=\bigcup_s S(R_s^2)$，$D_2=D_1\backslash S_2$。以下重复上面的做法$W_j=\{R_s^j\}$，$S_j=\bigcup_s S(R_s^j)$，$D_1=\{Q_i^k; k\geq -N\}\backslash S_1$，$D_j=D_{j-1}\backslash S_j$。显然，由上面的重新组合，我们有$\bigcup_t S_t=\{Q_j^k: k\geq -N\}$，且对每一个$Q_j^k$，存在唯一的$S(R_s^t)$，使得$Q_j^k\in S(R_s^t)$，$k\geq -N$。同时，对每一个$R_s^t\in W_t$，存在整数$m(t,s)$，使得$S(R_s^t)=\{Q_j^k\subseteq R_s^t: Q_j^k\in D_{t-1}, k<m(t,s)\}$以及

$$|R_s^t\cap\Omega_{m(t,s)}|<\frac{1}{2}|R_s^t|, \tag{3.12}$$

$$|R_s^t\cap\Omega_{m(t,s)-1}|\geq\frac{1}{2}|R_s^t|. \tag{3.13}$$

显然，$R_s^{t+1}\subset\Omega_{m(t,s)}$。因此，我们有

$$\sum_{R_s^{t+1}\subseteq R_j^t}|R_s^{t+1}|\leqslant\sum_{R_s^{t+1}\subseteq R_j^t}|R_s^{t+1}\cap R_j^t\cap\Omega_{m(t,j)}|$$

$$\leqslant|R_j^t\cap\Omega_{m(t,j)}|\leqslant\frac{1}{2}|R_j^t|,\quad(3.14)$$

其中 $R_j^t\in W_t, t\geqslant 1$。

对每个 $R_s^t\in W_t$，定义 $A_s^t=\sum_{Q_j^k\in S(R_s^t)}a_j^k(x)$。则 $F=\sum A_s^t$。

由于 $\operatorname{supp} a_j^k\subseteq\tilde{Q}_j^k$，知 $\operatorname{supp} A_s^t\subset\tilde{R}_s^t$。由(3.3)得

$$\|A_s^t\|_\infty\leqslant C_{p_0}\sum_{k=-N}^{m(t,s)}\leqslant C_{p_0}2^{m(t,s)},$$

这就是(3.9)。(3.10)是显然成立的。如果将 $\sum A_s^t$ 改写成 $\sum a_j$，则由 W_t 的构造得到(3.7)。由(3.14)经过迭代，得到

$$\sum_{Q_k\subset Q_j}|Q_k|\leqslant\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)|Q_j|\leqslant 2|Q_j|,$$

这就是(3.8)。

现设 B 是一个有限指标集：$B\subset\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$。令 $m(x)=\max\{m(t,s):(t,s)\in B, x\in\tilde{R}_s^t\}$，则由(3.3)得

$$\sum_{(t,s)\in B}|A_s^t(x)|\leqslant\sum_{k\leqslant m(x)}\sum_j|a_j^k(x)|\leqslant\sum_{-\infty}^{m(x)}C_{p_0}2^k=C_{p_0}2^{m(x)},$$

这实质上就是(3.11)。由(3.13)，有

$$\sum_{t,s}2^{pm(t,s)}|R_s^t|\leqslant 2\sum_m 2^{pm}\sum_{m(t,s)=m}|R_s^t\cap\Omega_{m-1}|$$

$$\leqslant 2\sum_m 2^{pm}|\Omega_{m-1}|\leqslant 2\int_{R^n}\sum_m 2^{pm}\chi_{\Omega_{m-1}}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_p\int_{R^n}|G^*(f)|^p\mathrm{d}x=C_p,$$

这就是(3.6)，其中我们不妨假设 $\|f\|_{H^p}=1$。引理3.3获证。

现在，我们可以将 F 写作 $F=\sum a_j$。令 $J(Q_j)=\{Q_k\subset 5Q_j,\ |Q_k|\leqslant|Q_j|\}$。由(3.3)知

$$\Big\|\sum_{Q_k\in J(Q_j)}\chi_{\tilde{Q}_k}\Big\|_1\leqslant C|Q_j|.$$

令 $\lambda>0$ 充分大，$E_j=\left\{x\in\tilde{Q}_j:\ \sum_{Q_k\in J(Q_j)}\chi_{\tilde{Q}_j}(x)>\lambda\right\}$，便有

$$|E_j|\leqslant\frac{C}{\lambda}|Q_j|. \tag{3.15}$$

引理3.4

$$\Big\|\sum_j\chi_{\tilde{Q}_j\setminus E_j}\Big\|_\infty\leqslant C\lambda.$$

证明 任意给定 x，对任意 m，最多只有 3^n 个方体 Q_j，$l(Q_j)=2^m$，使得 $\tilde{Q}_j$ 包含 x。因此

$$\Big\|\sum_j\chi_{\tilde{Q}_j\setminus E_j}\Big\|_\infty\leqslant 3^n\lambda.$$

记 $\tilde{a}_j=a_j\chi_{\tilde{Q}_j\setminus E_j}$，则 $\operatorname{supp}\tilde{a}_j\subseteq\tilde{Q}_j\setminus E_j$。由(3.9),(3.10)与(3.15)，有

$$\left|\int_{R^n}(x-x_j)^\alpha\tilde{a}_j(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{\tilde{Q}_j\setminus E_j}(x-x_j)^\alpha a_j(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{E_j}(x-x_j)^\alpha a_j(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{C_{p_0}}{\lambda}2^{m(j)}|Q_j|l(Q_j)^{|\alpha|}. \tag{3.16}$$

引理3.5 存在多项式 P_j，使得

$$\|P_j\|_{L^\infty(\tilde{Q}_j)}\leqslant C_{p_0}\frac{2^{m(j)}}{\lambda},$$

并且

$$\int_{R^n} x^\alpha(\tilde{a}_j - P_j\chi_{\tilde{Q}_j\setminus E_j})\mathrm{d}x = 0, \quad 当|\alpha|\leqslant N(p_0).$$

证明 只需对$\tilde{Q}_j=[0,1]^n=Q$时证明引理即可.不妨设$m(j)=0$.记

$$\beta_\alpha=\int_{R^n}x^\alpha\tilde{a}_j\mathrm{d}x.$$

由有限维 Hilbert 空间结果知，存在次数不超过$N(p_0)$的多项式P，使得

$$\|P\|_{L^\infty(Q)}\leqslant C_{p_0},$$

并且

$$\int_Q x^\alpha P\mathrm{d}x=\beta_\alpha.$$

根据（3.16）知$\|P\|_{L^\infty(Q)}\leqslant\dfrac{C_{p_0}}{\lambda}$. 令$T=P\chi_{Q\setminus E}$，$E=E_j$由$Q_j=Q$所定义，则

$$\left|\int_{R^n}x^\alpha(\tilde{a}_j-T)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_E x^\alpha P\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\frac{C_{p_0}}{\lambda}\right)^2,\quad |\alpha|\leqslant N(p_0).$$

只要取λ充分大，使$\dfrac{C_{p_0}}{\lambda}<1$，迭代下去，便知存在多项式$P$，满足引理3.5的要求.

现令$b_j=\tilde{a}_j-P_j\chi_{\tilde{Q}_j\setminus E_j}$，则

$$\operatorname{supp} b_j\subset\tilde{Q}_j\setminus E_j,\quad \|b_j\|_\infty\leqslant C_{p_0}2^{m(j)},$$

而且

$$\int_{R^n}x^\alpha b_j\mathrm{d}x=0,\quad 当|\alpha|\leqslant N(p_0).$$

引理3.6 $\|F-\sum b_j\|_{H^p}<1/4$.

证明 考虑两种情形：$p\leqslant1$与$p>1$.

情形1 $1<p<\infty$. 由

$$\|F-\sum b_j\|_p=\|\sum a_j-\sum b_j\|_p$$
$$\leqslant C_p\|\sum a_j\chi_{E_j}\|_p+C_p\|\sum P_j\chi_{\tilde{Q}_j\setminus E_j}\|_p,$$

利用引理3.3，有

$$|\sum a_j(x)\chi_{E_j}(x)|\leqslant C_{p_0}2^{m(j(x))},\quad x\in E_{j(x)}.$$

因此

$$|\sum a_j(x)\chi_{E_j}(x)|^p\leqslant C_{p_0}^p 2^{pm(j(x))}\chi_{E_{j(x)}}(x)$$
$$\leqslant C_{p_0}^{p_0}\sum 2^{pm(j)}\chi_{E_j}(x).$$

根据（3.15）与（3.6），有

$$\|\sum a_j\chi_{E_j}\|_p^p\leqslant C_{p_0}^p\int\sum 2^{pm(j)}\chi_{E_j}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C_{p_0,p}\lambda^{-1}\sum 2^{pm(j)}|Q_j|\leqslant C_{p_0,p}\lambda^{-1}.$$

类似地，对几乎所有的 x，有

$$\sum 2^{m(j)}\chi_{\tilde{Q}_j}(x)\leqslant 2\cdot 2^{m(j(x))}\chi_{\tilde{Q}_{j(x)}}(x),$$

从而

$$|\sum 2^{m(j)}\chi_{\tilde{Q}_j}(x)|^p\leqslant 2^p\sum 2^{pm(j)}\chi_{\tilde{Q}_j}(x).$$

于是

$$\|\sum P_j\chi_{\tilde{Q}_j\setminus E_j}\|_p^p\leqslant\left(\frac{C_{p_0}}{\lambda}\right)^p\|\sum 2^{m(j)}\chi_{\tilde{Q}_j}\|_p^p$$
$$\leqslant C_{p_0,p}\cdot\frac{1}{\lambda^p}\int\sum 2^{pm(j)}\chi_{\tilde{Q}_j}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C_{p_0,p}\lambda^{-p}.$$

只要取 λ 充分大，便得所要求的结果。

情形2　$0<p\leqslant 1$。只要证明估计

$$\|a_j-b_j\|_{H^p}^p\leqslant C_{p_0}\lambda^{-\frac{p}{2}}2^{pm(j)}|Q_j|\tag{3.17}$$

即可，这是因为由此可得

$$\|\sum a_j - \sum b_j\|_{H^p}^p \leqslant \sum \|a_j - b_j\|_{H^p}^p$$

$$\leqslant C_{p_0} \lambda^{-p/2} \sum 2^{pm(j)} |Q_j|$$

$$\leqslant C_{p,p_0} \lambda^{-p/2}.$$

而（3.17）是下面事实的明显推论：

$$\operatorname{supp}(a_j - b_j) \subseteq \tilde{Q}_j,$$

$$\int_{R^n} x^\alpha (a_j - b_j) dx = 0, \quad 当 |\alpha| \leqslant N(p_0),$$

$$\|a_j - b_j\|_2 \leqslant \|a_j \chi_{E_j}\|_2 + \|P_j \chi_{\tilde{Q}_j}\|_2^2$$

$$\leqslant C_p 2^{m(j)} \left(\frac{|Q_j|}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

现在我们可以来证明定理3.2了。

定理3.2的证明 首先证明 $H^p \subset [H^{p_0}, L^\infty]_\theta$。先看 $\sum b_j \in [H^{p_0}, L^\infty]_\theta$。因为 $\sum b_j$ 在H^p 范数下收敛，不妨设这是有限和。

令 $\alpha(z) = p\dfrac{1-z}{p_0} - 1$,

$$G(z) = \sum (2^{m(j)})^{\alpha(z)} b_j.$$

由于和号中只有有限项不为 0，因此

$$\|G(z)\|_{H^{p_0}} + \|G(z)\|_\infty \leqslant M, \quad 当 z \in S.$$

当 $\mathrm{Re}z = 1$ 时，

$$\|G(z)\|_\infty \leqslant \|\sum 2^{-m(j)} |b_j|\|_\infty$$

$$\leqslant C_{p_0} \|\sum \chi_{\tilde{Q}_j \setminus E_j}\|_\infty \leqslant C_{p_0}.$$

设 $p_0 \leqslant 1$，当 $\mathrm{Re}z = 0$ 时，

$$\|G(z)\|_{H^{p_0}}^{p_0} \leqslant \sum 2^{(p-p_0)m(j)} \|b_j\|_{H^{p_0}}^{p_0}$$

$$\leqslant C_{p_0} \sum 2^{(p-p_0)m(j)} 2^{p_0 m(j)} |Q_j|$$

$$\leqslant C_{p,p_0},$$

而显然，

$$\sum b_j = G(\theta)。$$

这样，我们证明了，对于 $f \in H^p, \|f\|_{H^p} = 1$，存在解析函数 $G(z)$，G：$S \to H^{p_0} \cap L^\infty$，满足

$$\sup_{t \in R} \|G(it)\|_{H^{p_0}} \leqslant C, \quad \sup_{t \in R} \|G(1+it)\|_{H^p} \leqslant C,$$

$$\|G(\theta) - f\|_{H^p} < 1/2。$$

通过迭代，便可得到 $H^p \subset [H^{p_0}, L^\infty]_\theta$。

为证明 $[H^{p_0}, L^\infty]_\theta \subset H^p$，考虑次可加算子 T：$f \to \varphi^+(f)$，f 的一种垂直极大函数。显然，T：$L^\infty \to L^\infty$ 以及 T：$H^{p_0} \to L^{p_0}$ 有界，故 T：$[H^{p_0}, L^\infty]_\theta \to [L^{p_0}, L^\infty]_\theta$ 有界。已知 $[L^{p_0}, L^\infty]_\theta = L^p$（见[BL]）。于是，若 $f \in [H^{p_0}, L^\infty]_\theta$，则 $\varphi^+(f) \in L^p$，即 $f \in H^p$。定理3.2证完。

§8.4 注释与进一步的结果

注释

最早的算子内插的结果是 Riesz-Thorin 定理，其中用的是复方法。Macinkiewicz 把它作了推广，用的是实方法。这些结果都是在 L^p 空间中作内插。有关内容可参看[Z]，[SW3]。首先考虑（解析函数）H^p 空间内插的是 Thorin 以及 Salem 与 Zygmund，见[Z]，[SZ]，他们只是研究一维的情形。高维的结果是由 Stein-Weiss首先研究的。本章引理1.1是 Calderón-Zygmund 分解的一种形式。当 $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2$ 时，此结果由 A.Chang 与 R.Fefferman 在乘积空间上首先得到[CF2]。这里叙述的结果与证明属于韩永生[H1]。定理1.1的证明也来自[H1]。

解析算子族在 L^p 空间的内插首先由 E.M.Stein 进行研究，见[SW3]，Stein-Weiss 接着把这结果推广到 $H^p(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$，参见[SW2]。用原子分解方法处理解析算子族插值的定理1.3，属于

Hermandez[He]. 应用中函数研究 L^p 与 L^∞ 之间内插的属于 C. Feffeman 和 E.Stein（见[FS2]）。

内插空间的实方法中，我们只介绍了 K 泛函。这是由 J.L. Lions, S.G.Krein 与 J.Peetre 建立与发展起来的。Igari 最早研究了 H^1 与 L^∞ 的实内插空间[I1]，[I2]，他的结果于 1973 年由 Riviere 与 Sagher 重新得到[RS]。高维的 H^p 与 L^∞ 间的实内插结果属于 C.Fefferman-Riviere-Sagher[FRS]，他们的证明与高维 H^p 空间的原子分解已十分接近。本章引理3.1的证明，用的就是他们的方法。此方法被 Latter 发展得到 $H^p(\boldsymbol{R}^n)(n>1)$ 的原子分解。本章关于 H^1 与 L^∞ 实内插空间的推论 2.2 的证明取自[BeS2]。关于 L^1 与 BMO 实内插空间的结果属于 Bennett-Sharpley，参见[BS2]，[BS1]。

内插空间的复方法是由 A.P.Calderón 发展起来的[C6]。定理3.2属于 S.Janson 与 P.Jones（参见[JJ]）。

内插空间一本十分流行的参考书是[BL]。

进一步的结果

1. 用 K 泛函可以证明

$$(H^{p_0},L^\infty)_{\theta,q}=H^{p,q},\quad 0<p_0<\infty,\ \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0},$$

其中

$$H^{p,q}=\{f\mid G^*(f)\in L_{pq}\},$$

$G^*(f)$ 表示 f 的大极大函数（grand maximal function），L_{pq} 表示 Lorentz 空间。参看[FRS]。

2. R.Hans 研究了 L^p,H^p 与 BMO 的内插空间，他的结果是：

$$(L^{p_0},\mathrm{BMO})_{\theta,q}=L_{pq},\quad 0<p_0<\infty,\ \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0},$$

$$(H^{p_0},\mathrm{BMO})_{\theta,q}=H^{p,q},\quad 0<p_0<\infty,\ \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0},$$

参见[Ha]。

3. R.Devore 得到过 $K(t,f;H^1,\mathrm{BMO})$ 的另一种刻画。他引入了 H^1 空间的#函数：

$$f^{\#}_{H^1}(x)=\sup_{x\in Q}\inf_{\varphi\in\Phi_Q}\frac{1}{|Q|}\|(f-P_Qf)\varphi\|_{H^1},$$

其中 Φ_Q 由具有下列性质的 φ 组成：

(i) $\operatorname{supp}\varphi\subset 20\sqrt{n}\,Q$；

(ii) $0\leqslant\varphi\leqslant 1$；

(iii) $\varphi(x)\geqslant 1/(20\sqrt{n})$，当 $x\in(20\sqrt{n})^{-1}Q$；

(iv) $\|D^\alpha\varphi\|_\infty\leqslant 20\sqrt{n}\,l(Q)^{-|\alpha|}$，$|\alpha|\leqslant n+1$。

$P_Q f$ 是满足

$$\int_{R^n}(f-P_Qf)x^\alpha\mathrm{d}x=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant n+1$$

的次数不高于 $n+1$ 的唯一多项式。

DeVore 的结果是

$$K(t,f;H^1,\mathrm{BMO})\sim t(f^{\#}_{H^1})^*(t),$$

参见[DeV]。

4. B.Jawerth 得到过 $K(t,f;H^1,\mathrm{BMO})$ 的又一种刻画。记 $\Gamma_h(x)$ 为截锥

$$\Gamma_h(x)=\left\{(y,t)|\in \boldsymbol{R}^{n+1}_+:\ |x-y|<\frac{t}{2},\ 0<t<h\right\},$$

$S_h(f)$ 为 f 由截锥定义的面积积分：

$$S_h(f)(x)=\left(\iint_{\Gamma_h(x)}|t\nabla u(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/2},$$

其中 u 为 f 的 Poisson 积分。

对 $0<\alpha<1$，引入极大函数

$$S^{\#}_\alpha(f)(x)=\sup_{x\in Q}\inf\{A:\ |\{y\in Q:\ S_{l(Q)}(f)(y)>A\}|<\alpha|Q|\}.$$

可以证明，$\|S^{\#}_\alpha(f)\|_1\leqslant C_{\alpha n}\|f\|_{H^1}$，$\|S^{\#}_\alpha(f)\|_\infty\leqslant C_{\alpha n}\|f\|_*$。

Jawerth 证明了，当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$时，

$$K(t,f;H^1,\mathrm{BMO})\sim\int_0^t(S_\alpha^*(f))^*(s)\mathrm{d}s,$$

参见[Ja]。

5. R.Coifman, M.Cwikel, R.Rochberg, Y.Sagher 与 G. Weiss 把 A.P.Calderón 的复内插方法，推广到高维复区域 $D\subset\boldsymbol{C}^n$ 的 Banach 空间族。设 $D\subset\boldsymbol{C}^n$，∂D 是 D 的边界，设对每一点 $\xi\in\partial D$，对应于 Banach 空间 B_ξ。他们由此构造"中间空间" B_z，$z\in D$，并建立了相应的内插理论。为简单起见，我们只叙述 $\boldsymbol{D}$ 是复平面上的单位圆盘的情形。对于 Banach 空间 $B_{e^{i\theta}}=(\boldsymbol{C}^n,|\cdot|_{e^{i\theta}})$，$\theta\in[0,2\pi)$，要求它满足如下的条件：对任意 $v\in\boldsymbol{C}^n$，$\theta\rightarrow|v|_{e^{i\theta}}$ 是可测函数，并且

$$K_1(\theta)\|v\|\leqslant|v|_{e^{i\theta}}\leqslant K_2(\theta)\|v\|,$$

其中 $\|v\|=\left(\sum_{k=1}^n|v_k|^2\right)^{1/2}$ 是通常的欧氏范数，$\log K_j(\theta)$ 在 $[0,2\pi)$ 可积，$j=1,2$。

为定义"中间空间" $B_z=(\boldsymbol{C}^n,|\cdot|_z)$，$z\in\boldsymbol{D}$，令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_z(\theta)&=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\\&\quad+\frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{r\sin(\varphi-\theta)}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\\&=P_z(\theta)+\mathrm{i}Q_z(\theta),\quad z=re^{i\varphi}.\end{aligned}$$

$P_z(\theta)$ 与 $Q_z(\theta)$ 实际上是 $\boldsymbol{D}$ 上的 Poisson 核与共轭 Poisson 核。再令

$$W_j(z)=\exp\left\{\int_0^{2\pi}\boldsymbol{h}_z(\theta)\log K_j(\theta)\mathrm{d}\theta\right\},\quad j=1,2,z\in\boldsymbol{D}.$$

由 $\log K_j(\theta)$ 的可积性知 $W_j(z)$ 有定义，$W_j(z)\neq0$。进一步可知

$\log W_j(z)\in H^p(\boldsymbol{D}),0<p<1$。因此

$$\lim_{z\to e^{i\theta}}|W_j(z)|=K_j(\theta),\quad 对\ \theta\in[0,2\pi)几乎处处成立.$$

记 $H_j^p=H_j^p(\boldsymbol{D},\boldsymbol{C}^n)$ 是由所有定义在 $\boldsymbol{D}$ 内取值 $\boldsymbol{C}^n$ 的向量值解析函数组成，并满足

$$\|F\|_j^p=\sup_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi}\|W_j(re^{i\theta})F(re^{i\theta})\|^p\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}<\infty.$$

因此，$F=(f_1,\cdots,f_n)\in H_j^p$，当且仅当 $W_jf_k\in H^p(\boldsymbol{D})$，$k=1,2,\cdots,n$。故 F 存在边值 $F(e^{i\theta})$。定义

$$H_*^p=\left\{F\in H_j^p:\ |||F|||_p=\left(\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|_{e^{i\theta}}^p\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}<\infty\right\}.$$

由此，定义“中间空间”的范数

$$|||F|||_{p,z_0}=\left(\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|_{e^{i\theta}}^p P_{z_0}(\theta)d\theta\right)^{1/p},\quad z_0\in\boldsymbol{D}.$$

对于任意 $v\in\boldsymbol{C}^n$，定义

$$|v|_{p,z_0}=\inf\{|||F|||_{p,z_0}:\ F\in H_*^p,\ F(z_0)=v\}.$$

在此基础上，他们证明了一系列的内插定理，并得到许多的应用。目前，这一理论仍然在继续发展之中。参看[CCRSW1—2]，[RoW1—3]。

第九章　Besov空间与Triebel-Lizorkin空间的原子刻画

H^p 空间的分解技术，给函数空间的研究带来了深刻的影响。在本章中我们应用原子分解的思想研究 Besov 空间与Triebel-Lizorkin 空间。L^p 空间，H^p 空间以及 Sobolev 空间都是这些空间的特殊情形，因此需要推广原子与分子的概念，从而得到这些空间的原子、分子分解定理。这些分解定理将给许多应用带来很大的便利。作为这类分解定理的一个应用，我们给出 BMO 的原子、分子分解定理，并用它们给出第七章 §7.1 定理 1.5 (C.Fefferman-Stein) 的一个构造性证明及其推广。在下一章，我们还将应用 Triebel-Lizorkin 空间的原子、分子分解定理，研究算子在这些空间上的有界性。

§9.1　Besov 空间的原子刻画

某些 Besov 空间可以通过连续模定义，因而它是 Lipschitz空间与 Sobolev 空间的一种推广。它在偏微分方程、变分法、逼近论、理论数值分析、调和分析、算子理论等领域有广泛的应用。1976年，J.Peetre 用 Littlewood-Paley 的方法，对它进行了新的统一的处理。下面我们引用的是 J.Peetre 的定义。

设 $-\infty<\alpha<\infty$，$0<p,q\leqslant\infty$，$\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbf{Z}}$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数族，满足条件

$$\varphi_\nu\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n),\tag{1.1}$$

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}_\nu\subseteq\left\{\xi\in\boldsymbol{R}^n:\ \frac{1}{2}\leqslant2^{-\nu}|\xi|\leqslant2\right\},\tag{1.2}$$

$$|\hat{\varphi}_\nu(\xi)|\geqslant C>0,\ \text{当}\frac{3}{5}\leqslant 2^{-\nu}|\xi|\leqslant\frac{5}{3},\tag{1.3}$$

$$|\partial^\alpha\hat{\varphi}_\nu(\xi)|\leqslant C_\alpha 2^{-\nu|\alpha|},\ \text{当}|\alpha|\geqslant 0.\tag{1.4}$$

有时还可以要求

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}_\nu(\xi)=1。\tag{1.5}$$

构造一族$\{\varphi_\nu\}$的最简单的方法是：取$\varphi(x)\in\mathscr{S}$为径向函数，$\mathrm{supp}\hat{\varphi}(\xi)\subset\left\{\xi\in \boldsymbol{R}^n:\ \frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant 2\right\}$，且$|\hat{\varphi}(\xi)|\geqslant C>0$，当$\frac{3}{5}\leqslant|\xi|\leqslant 5/3$（甚至可简单地取$\hat{\varphi}(\xi)=1$，当$\frac{3}{5}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{5}{3}$时）。然后令$\hat{\varphi}_\nu(\xi)=\hat{\varphi}(\xi/2^\nu)$。

定义1.1 设函数族$\{\varphi_\nu\}$满足(1.1)—(1.4)。我们称$f\in\mathscr{S}'/\mathscr{P}$（即广义函数$\mathscr{S}'$模去多项式）属于Besov空间$\dot{B}_p^{\alpha,q}$，$-\infty<\alpha<\infty$，$0<p,q\leqslant\infty$，如果

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\alpha,q}}=\left\{\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}\|\varphi_\nu*f\|_p)^q\right\}^{1/q}<\infty.$$

当$q=\infty$时，上式右方按通常的l^∞模理解。

符号$\dot{B}_p^{\alpha,q}$上的点"·"，表示这里讨论的是齐次Besov空间。我们本节所讨论的内容，对非齐次Besov空间也有类似的结果。

Peetre曾经证明过，$\dot{B}_p^{\alpha,q}$与函数族$\{\varphi_\nu\}$的选择无关。

我们引入对$\dot{B}_p^{\alpha,q}$合适的原子概念。

定义1.2 $\boldsymbol{R}^n$上的函数$a(x)$称为(p,α)原子，其中$-\infty<\alpha<\infty$，$0<p\leqslant\infty$，如果

(1) $\mathrm{supp}\,a(x)\subseteq 3Q$，其中$Q$是$\boldsymbol{R}^n$中的方体，$3Q$表示与$Q$同中心，边长为$Q$的3倍的方体；

(2) $|\partial^\gamma a(x)|\leqslant|Q|^{\alpha/n-1/p-|\gamma|/n}$，对任意$0\leqslant|\alpha|\leqslant K$；

(3) $\int_{R^n}x^\gamma a(x)\mathrm{d}x=0$，对任意$0\leqslant|\gamma|\leqslant N$，

其中 $K>([\alpha]+1)_+$， $N\geqslant\max\left(\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)_+-\alpha\right],-1\right)$； $x_+=\max(x,0)$。特别地，如果上式退化为 $N\geqslant-1$，则表示 a 不需要任何消失矩条件。

为了用上述的 (p,α) 原子刻画 $\dot{B}_p^{\alpha,q}$，我们需要 $\dot{B}_p^{\alpha,q}$ 的 Calderón 表示定理。为此，需要建立下列几个引理。

引理1.1 存在 $\theta\in C^\infty(R^n)$，$\mathrm{supp}\theta\subseteq\{x\,|\,|x|\leqslant1\}$，且

$$\int_{R^n}\theta(x)\mathrm{d}x=0,\quad \hat{\theta}(\xi)\geqslant C>0,\quad 当\frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant2.$$

证明 取 $h\in C^\infty(R^n)$ 是实值径向函数，满足 $\mathrm{supp}h\subseteq\{x\,|\,|x|\leqslant1\}$ 且 $\int_{R^n}h(x)\mathrm{d}x=1$。这时 $\hat{h}$ 也是实值径向函数，且 $\hat{h}$ 连续，$\hat{h}(0)=\int h(x)\mathrm{d}x=1$。因此，存在 $\frac{1}{2}>\varepsilon>0$，使得 $\hat{h}(\xi)\geqslant\frac{1}{2}$，当 $|\xi|\leqslant2\varepsilon$。记 $h_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}h(x/\varepsilon)$。显然

$$\mathrm{supp}h_\varepsilon\subseteq\{x\,|\,|x|\leqslant\varepsilon\},\quad \hat{h}_\varepsilon(\xi)=\hat{h}(\varepsilon\xi)\geqslant1/2,\quad 当|\xi|\leqslant2.$$

令 $\theta(x)=-\Delta h_\varepsilon(x)$，即

$$\hat{\theta}(\xi)=4\pi^2|\xi|^2\hat{h}_\varepsilon(\xi)=4\pi^2|\xi|^2\hat{h}(\varepsilon\xi).$$

显然，$\hat{\theta}(0)=0$，且当 $1/2\leqslant|\xi|\leqslant2$ 时，$\varepsilon/2\leqslant|\varepsilon\xi|\leqslant2\varepsilon$，有

$$\hat{\theta}(\xi)=4\pi^2|\xi|^2\hat{h}(\varepsilon\xi)\geqslant1/2,$$

即 $\theta(x)$ 满足引理要求。

引理1.2 存在函数 φ 与 θ，使得 $\varphi_\nu(x)=2^{\nu n}\varphi(2^\nu x)$ 满足条件 (1.1)—(1.4)，θ 满足引理1.1的要求，并且

$$\sum_{\nu\in Z}\hat{\varphi}_\nu(\xi)\hat{\theta}_\nu(\xi)=1,\quad \xi\neq0,$$

其中 $\theta_\nu(x)=2^{\nu n}\theta(2^\nu x)$。

证明 取 $\eta\in\mathscr{S}(R^n)$，满足 $\mathrm{supp}\hat{\eta}\subseteq\left\{\xi:\ \frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant2\right\}$，

$\eta(\xi)\geqslant C>0$，当$\frac{3}{5}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{5}{3}$，并且当$\xi\neq 0$时$\sum_{\nu\in Z}\eta_\nu(\xi)=1$，其中$\eta_\nu(x)=2^{\nu n}\eta(2^\nu x)$。这样的$\eta$是存在的。事实上，取$r_\nu(x)$为接着(1.5)后所构造的函数族，则只要令

$$\eta(\xi)=\frac{\hat{r}(\xi)}{\sum_\nu \hat{r}_\nu(\xi)},$$

便满足所要求的条件。设θ是引理1.1中的函数。记$g(\xi)=\eta(\xi)/\hat{\theta}(\xi)$，当$\frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant 2$，而对其它的$\xi$，令$g(\xi)=0$。由于$\hat{\theta}(\xi)\geqslant C>0$，当$\frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant 2$，知$g\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$。令$\varphi=\check{g}$，即$\hat{\varphi}=g$，则$\varphi_\nu(x)=2^{\nu n}\varphi(2^\nu x)$满足(1.1)—(1.4)，并且

$$\sum\hat{\theta}_\nu(\xi)\hat{\varphi}_\nu(\xi)=\sum\eta(\xi)=1,\quad \xi\neq 0.$$

引理1.3 设$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$。则$\operatorname{supp}\hat{f}=\{0\}$的充分必要条件是$f$为一多项式。

回忆$\operatorname{supp}g=\{0\}$，是指对任意$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$0\notin\operatorname{supp}\varphi$，有$\langle g,\varphi\rangle=0$。

证明 事实上，若$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，则$\operatorname{supp}\hat{f}=\{0\}$的充分必要条件是$\hat{f}$为$\delta$函数的偏导数的有限线性组合，即$\hat{f}=\sum_{|\alpha|\leqslant d}C_\alpha\partial^\alpha\delta$，它等价于

$$f=\sum_{|\alpha|\leqslant d}C_\alpha(-\mathrm{i}x)^\alpha.$$

值得指出的是，$\varphi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$且$0\notin\operatorname{supp}\hat{\varphi}$意味着

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}x^\nu\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle x^\nu,\varphi\rangle=\langle\widehat{x^\nu},\check{\varphi}\rangle$$

$$=\langle(-\mathrm{i})^{|\nu|}\partial^\nu\delta,\check{\varphi}\rangle=0,$$

这里只需用到 $\check{\varphi}(\xi)=(-1)^n\varphi(\xi)$。这就是说，$\varphi$ 具有任意阶的消失矩。

我们的目的是要得到一个恒等式。设 η，如引理1.2所述，即

$$\sum_{\nu\in Z}\eta_\nu(\xi)=1,\ \text{当}\ \xi\neq 0,$$

我们形式地看，当 $f\in\mathscr{S}'(R^n)$ 时，

$$f=\sum_{\nu\in Z}\eta_\nu * f$$

在什么意义下成立？由于 $\operatorname{supp}\hat{\eta}_\nu\subseteq\{\xi:\ 2^{\nu-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^\nu\}$，当 f 是一多项式时，由引理1.3知

$$\eta_\nu * f(x)=\int_{R^n}\eta_\nu(y)f(x-y)\mathrm{d}y=0,$$

即 $\sum\eta_\nu * f=0$ 对任意多项式成立。而由 $\sum_{\nu\in Z}\hat{\eta}_\nu(\xi)=1(\xi\neq 0)$，知

$$\left(f-\sum\eta_\nu * f\right)^\wedge(\xi)=0,\quad \xi\neq 0.$$

即 $f-\sum_{\nu\in Z}\eta_\nu * f$ 为一多项式。下面我们把这些推理所包括的极限过程严格地写出来。

引理1.4 设 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$ 且当 $0\leqslant|\beta|\leqslant d$ 时，$\partial^\beta\varphi(0)=0$，其中 d 是一正整数，则存在 $\{\varphi_\alpha\}_{|\alpha|=d+1}$，$\varphi_\alpha\in\mathscr{S}(R^n)$，使得 $\varphi=\sum_{|\alpha|=d+1}x^\alpha\varphi_\alpha$，并且对每个 α，映射 $\varphi\to\varphi_\alpha$ 是由 $\mathscr{S}(R^n)$ 到 $\mathscr{S}(R^n)$ 的线性连续映射。

证明 考虑 $d=0$ 的情形。当 $|x|\leqslant 2$ 时，

$$\varphi(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(tx)\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{j=1}^n x_j\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t,$$

当$|x|>1$时，

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{x_j}{|x|^2}\varphi(x).$$

令$\chi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，当$|x|\leqslant1$时$\chi=1$，当$|x|\geqslant2$时$\chi=0$．这样

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j\varphi_j(x),$$

其中

$$\varphi_j(x)=\chi(x)\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t+(1-\chi(x))\frac{x_j}{|x|^2}\varphi(x).$$

现在证明$\varphi\to\varphi_j$是$\mathscr{S}$到$\mathscr{S}$的线性连续映射。事实上，当$|x|\leqslant2$时，

$$\left|\partial^\gamma\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1\left|\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(tx)\right|\mathrm{d}t.$$

同样可得

$$\left|\partial^\gamma\chi(x)\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t\right|\leqslant C_\gamma,\quad 当|x|\leqslant2.$$

当$|x|\geqslant1$时，由$\varphi\in\mathscr{S}$也可得到

$$\left|\partial^\gamma(1-\chi(x))\frac{x_j}{|x|^2}\varphi(x)\right|\leqslant\frac{C_{N\gamma}}{(1+|x|)^\gamma}.$$

因此$\varphi_j\in\mathscr{S}$，并且$\varphi\to\varphi_j$是$\mathscr{S}$到$\mathscr{S}$的线性连续映射。

引理1.5 设$f_n\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，且对每个$\alpha$：$|\alpha|\geqslant d+1$，$\partial^\alpha f_n$在$\mathscr{S}'$意义下收敛，则存在次数不超过$d$的多项式$P_n$，使得当$n\to\infty$时，$f_n-P_n$在$\mathscr{S}'$意义下收敛。

证明 设g_α是$\partial^\alpha f_n$在$\mathscr{S}'$的极限，其中$|\alpha|\geqslant d+1$。χ如引理1.4所述。令

$$\varphi^*(x)=\varphi(x)-\chi(x)\sum_{|\alpha|\leqslant d}\partial^\alpha\varphi(0)\frac{x^\alpha}{\alpha!},$$

则$\partial^\beta\varphi^*(0)=0$，当$|\beta|\leqslant d$。容易看出，若$\varphi_n\in\mathscr{S}$，且当$n\to\infty$时$\varphi_n$在$\mathscr{S}$中趋向于0，则$\varphi_n^*$在$\mathscr{S}$中也趋向于0．并且$\varphi\to\varphi^*$是线性

映射。

由引理1.4知，存在 $\varphi_\alpha^* \in \mathscr{S}$，使得

$$\varphi^*(x) = \sum_{|\alpha|=d+1} x^\alpha \varphi_\alpha^*(x).$$

因此：

$$\langle \hat{f}_n, \varphi^* \rangle = \sum_{|\alpha|=d+1} \langle \hat{f}_n, x^\alpha \varphi_\alpha^* \rangle = \sum_{|\alpha|=d+1} \langle f_n, (x^\alpha \varphi_\alpha^*)^\wedge \rangle$$

$$= \sum_{|\alpha|=d+1} \langle f_n, \mathrm{i}^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{\varphi}_\alpha^* \rangle$$

$$= \sum_{|\alpha|=d+1} \langle \partial^\alpha f_n, (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \hat{\varphi}_\alpha^* \rangle$$

$$\to \sum_{|\alpha|=d+1} \langle g_\alpha, (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \hat{\varphi}_\alpha^* \rangle.$$

现令 $C_{n,\alpha} = \left\langle \hat{f}_n, \chi(x) \dfrac{x^\alpha}{\alpha!} \right\rangle$，$P_n(x) = \sum_{|\alpha| \leq d} (-\mathrm{i})^{|\alpha|} C_{n\alpha} x^\alpha$，则

$$\hat{P}_n = \sum_{|\alpha| \leq d} (-1)^{|\alpha|} C_{n\alpha} \partial^\alpha \delta.$$

对任意 $\psi \in \mathscr{S}$，令 $\varphi = \check{\psi}$ 即 $\hat{\varphi} = \psi$，则有

$$\langle f_n - P_n, \psi \rangle = \langle f_n - P_n, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{f}_n - \hat{P}_n, \varphi \rangle$$

$$= \langle \hat{f}_n, \varphi \rangle - \sum_{|\alpha| \leq d} C_{n\alpha} \partial^\alpha \varphi(0)$$

$$= \langle \hat{f}_n, \varphi \rangle - \sum_{|\alpha| \leq d} \left\langle \hat{f}_n, \chi(x) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \right\rangle \partial^\alpha \varphi(0)$$

$$= \left\langle \hat{f}_n, \varphi - \sum_{|\alpha| \leq d} \partial^\alpha \varphi(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \chi(x) \right\rangle$$

$$= \langle \hat{f}_n, \varphi^* \rangle$$

$$\to \sum_{|\alpha| = d+1} \langle g_\alpha, (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \hat{\varphi}_\alpha^* \rangle，\quad 当 n \to \infty.$$

现在定义 f：$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n) \to \boldsymbol{C}$ 如下：

$$\langle f,\psi\rangle=\sum_{|\alpha|=d+1}\langle g_\alpha,(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\hat{\varphi}_\alpha^*\rangle.$$

由于

$$\psi\to\varphi\to\varphi_\alpha\to\varphi_\alpha^*\to\hat{\varphi}_\alpha^*$$

中每一个映射都是$\mathscr{S}$到$\mathscr{S}$线性连续的。故当$\psi_n\to\psi$在$\mathscr{S}$中收敛时，有$(\hat{\varphi}_n)_\alpha^*\to\hat{\varphi}_\alpha^*$在$\mathscr{S}$收敛，从而$\langle f,\psi_n\rangle\to\langle f,\psi\rangle$，即的确有$f\in\mathscr{S}'$，且

$$f=\lim_{n\to\infty}(f_n-P_n)$$

在$\mathscr{S}'$意义下成立。

引理1.6 设$H\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，$\operatorname{supp}\hat{H}\subseteq\{\xi\,|\,|\xi|\leqslant1\}$，并且$\hat{H}(\xi)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu(\xi)=1$，其中$\eta_\nu$如引理1.2所述，又对任意$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，记$f_N=\sum_{\nu=0}^{N}\eta_\nu*f$。则当$N\to\infty$时，$f_N\to f-H*f$在$\mathscr{S}'$意义下成立。

证明 对任意$\psi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，令$\hat{\varphi}=\psi$，$\chi_N=1-\hat{H}-\sum_{j=0}^{N}\hat{\eta}_j$，则当$|x|\leqslant2^N$时$\chi_N(x)=0$，当$|x|\geqslant2^{N+1}$时$\chi_N(x)=1$，而当$2^N\leqslant|x|\leqslant2^{N+1}$时，$\chi_N(x)=-\hat{\eta}_N(x)$。因此

$$\partial^\beta\chi_N(x)=0,\quad 当|x|\leqslant2^N或|x|\geqslant2^{N+1},$$

$$|\partial^\beta\chi_N(x)|=|\partial^\beta\hat{\eta}(2^{-N}x)|\leqslant C2^{-N|\beta|},\quad 当2^N\leqslant|x|\leqslant2^{N+1}.$$

对任意$M\in\boldsymbol{Z}_+$，令

$$\rho_{M\alpha}(\varphi)=\sup_x(1+|x|)^M|\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

则对任意$K\in\boldsymbol{Z}_+$，有

$$|\langle f_N-(f-H*f),\psi\rangle|=|\langle f-f_N-H*f,\hat{\varphi}\rangle|$$

$$=\left|\langle\hat{f},\varphi\rangle-\left\langle\hat{f},\left(\hat{H}+\sum_{j=1}^{N}\hat{\eta}_j\right)\varphi\right\rangle\right|$$

$$=\langle\hat{f},\chi_N\varphi\rangle$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|<K}\rho_{M\alpha}(\chi_N\varphi)$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|<K}\sup_x(1+|x|)^M$$

$$\times\sum_{|\sigma|+|\tau|=|\alpha|}C_{\sigma,\tau}|\partial^\sigma\chi_N(x)||\partial^\tau\varphi(x)|$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|<K}\sup_{|x|>2^N}(1+|x|)^M|\partial^\alpha\varphi(x)|$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|<K}\sup_{|x|>2^N}(1+|x|)^{-1}\to 0(\text{当}N\to\infty)。$$

定义1.3 称广义函数$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$为$m$阶的，$m\in\boldsymbol{Z}_+$，如果存在常数$C>0,M\in\boldsymbol{Z}_+$，使得对任意$\varphi\in\mathscr{S}$，有

$$|f(\varphi)|\leqslant C\sum_{|\alpha|<m}\rho_{M\alpha}(\varphi)。$$

引理1.7 设$f\in\mathscr{S}'$，$\hat{f}$ 为m阶的，$f_N=\sum_{j=-N}^{-1}\eta_j*f$,其中$\eta_j$如上所述，则当$|\nu|\geqslant m+1$时，$\partial^\nu f_N$ 当 $N\to\infty$时在$\mathscr{S}'$中收敛。

证明 设$|\nu|\geqslant m+1$，$\psi\in\mathscr{S}$，$\hat{\varphi}=\psi$。我们首先证明$\{\langle\partial^\nu f_N,\psi\rangle\}_{N=1}^\infty$是 Cauchy 列。为此，令 $M>N$，记$\chi_{NM}=\sum_{\nu=-M}^{-N-1}\hat{\eta}_\nu$。注意到

$$\chi_{NM}=\begin{cases}0, & \text{当}|x|<2^{-M-1}\text{或}|x|>2^{-N},\\ 1, & \text{当}2^{-M}<|x|<2^{-N-1},\\ \hat{\eta}_{-M}, & \text{当}2^{-M-1}<|x|<2^{-M},\\ \hat{\eta}_{-N-1}, & \text{当}2^{-N-1}<|x|<2^{-N},\end{cases}$$

便有

$$|\partial^\nu\chi_{NM}(x)|\leqslant\max\{|\partial^\nu\hat{\eta}(2^m\xi)|,|\partial^\nu\hat{\eta}(2^{N+1}\xi)|\},\ \text{当}\nu\neq0,$$

因此对任意ν，有

$$|\partial^\nu\chi_{NM}(x)|\leqslant C_\nu|x|^{-|\nu|}\chi_{\{x\in R^n:\ |x|<2^{-N}\}}。$$

故对某个 $K\in \mathbf{Z}_+$，有

$$|\langle\partial^\nu f_M,\psi\rangle-\langle\partial^\nu f_N,\psi\rangle| = \left|\left\langle\sum_{\nu=-M}^{-N-1}\eta_\nu * f,(-1)^{|\nu|}\partial^\nu\hat{\varphi}\right\rangle\right|$$

$$= \left|\left\langle\sum_{\nu=-M}^{-N-1}\eta_\nu * f,(x^\nu\varphi)^\wedge\right\rangle\right| = \left\langle\hat{f},\sum_{\nu=-M}^{-N-1}\hat{\eta}_\nu x^\nu\varphi\right\rangle$$

$$= |\langle\hat{f},\chi_{NM}\ x^\nu\varphi\rangle|$$

$$\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup(1+|x|)^K|\partial^\beta\chi_{NM}\ x^\nu\varphi(x)|$$

$$\leqslant C_\varphi\sum_{|\beta|\leqslant m}\sum_{|x|\leqslant 2^{-N}}\sum_{|\sigma|+|\tau|=|\beta|}C_{\sigma\tau}|\partial^\tau\chi_{NM}\ (x)|$$

$$\times|\partial^\sigma x^\nu\varphi(x)|$$

$$\leqslant C_\varphi\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup_{|x|\leqslant 2^{-N}}\sum_{|\sigma|+|\tau|=|\beta|}|x|^{-\tau}$$

$$\times\sum_{|\rho|+|\delta|=|\sigma|}C_{\rho\sigma}|\partial^\rho x^\nu||\partial^\delta\varphi(x)|$$

$$\leqslant C_\varphi\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup_{|x|\leqslant 2^{-N}}\sum_{|\sigma|+|\tau|=|\beta|}|x|^{-|\tau|}|x|^{|\nu|-|\sigma|}$$

$$\leqslant C_\varphi\sup_{|x|\leqslant 2^{-N}}|x|^{|\nu|-m}$$

$$\leqslant C_\varphi 2^{-N(|\nu|-m)}\to 0,\ 当N\to\infty。$$

这样，当$|\nu|\geqslant m+1$时，我们可以定义 g_ν：$\mathscr{S}\to\mathbf{C}$如下：

$$\langle g_\nu,\psi\rangle=\lim_{N\to\infty}\langle\partial^\nu f_N,\psi\rangle。$$

显然 g_ν 是线性的，并且还有下面的估计

$$|\langle\partial^\nu f_N,\psi\rangle| = |\langle\partial^\nu f_N,\hat{\varphi}\rangle| = |\langle\hat{f},\chi_{0N}x^\nu\varphi\rangle|$$

$$\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup_x(1+|x|)^K|\partial^\beta(\chi_{0N}x^\nu\varphi)|$$

$$
\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup_{|x|\geqslant 1}\sum_{|\sigma|+|\tau|=|\beta|}C_{\sigma,\tau}|x|^{-\tau}\sum_{|\rho|+|\delta|=|\sigma|}C_{\rho,\delta}
$$

$$
\times|\partial^{\rho}x^{\sigma}||\partial^{\delta}\varphi(x)|
$$

$$
\leqslant C\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}\\|\delta|\leqslant m}}|\partial^{\delta}\varphi(x)|\sum_{|\beta|\leqslant m}\sup_{|x|\geqslant 1}\sum_{|\sigma|+|\tau|=|\beta|}|x|^{-\tau}|x|^{|\sigma|-|\rho|}
$$

$$
\leqslant C\sup_{\substack{x\\|\delta|\leqslant m}}|\partial^{\delta}\varphi(x)|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant L}\rho_{j\alpha}(\varphi),
$$

其中 L,j 是两个正整数．故

$$
|\langle g_{\nu},\psi\rangle|\leqslant\lim_{N\to\infty}|\langle\partial^{\nu}f_{N},\psi\rangle|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant L}\rho_{j\alpha}(\varphi),
$$

这说明 $g_{\nu}\in\mathscr{S}'$，且 $\partial^{\nu}f_{N}\to g_{\nu}$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下成立．

现在我们可以证明 Calderón 型表示定理了．

定理1.1 设 $\{\eta_{\nu}\}$ 如前所述，$f\in\mathscr{S}'$，$\hat{f}$ 是 m 阶的，则存在多项式序列 $\{P_{N}\}_{N=1}^{\infty}$，其次数 p_{N} 不超过 m，以及一个多项式 P，使得

$$
f=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{\nu=-N}^{\infty}\eta_{\nu}*f+P_{N}\Big)+P
$$

在 $\mathscr{S}'$ 意义下成立．换言之，

$$
f=\sum_{\nu\in Z}\eta_{\nu}*f
$$

在 $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ 意义即广义函数 $\mathscr{S}'$ 模去多项式意义下成立．

证明 由引理 1.6，$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\eta_{\nu}*f=f-H*f$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下成立．再由引理 1.5 与 1.7，存在多项式序列 P_{N}，其次数均不超过 m，使得 $\sum\limits_{\nu=-N}^{-1}\eta_{\nu}*f+P_{N}$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛．现设 $\varphi\in\mathscr{S}$，且 $0\notin\operatorname{supp}\varphi$，则 $\langle\hat{P}_{N},\varphi\rangle=0$，因而

$$
\lim_{N\to\infty}\Big\langle\Big(f-\sum_{\nu=-N}^{\infty}\eta_{\nu}*f-P_{N}\Big)^{\wedge},\varphi\Big\rangle
$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\langle f - \sum_{\nu=-N}^{-1}\eta_\nu * f - f + H * f, \hat{\varphi}\right\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\langle\left(H - \sum_{\nu=-N}^{-1}\eta_\nu\right) * f, \hat{\varphi}\right\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\langle \hat{f}, \left(\hat{H} - \sum_{\nu=-N}^{-1}\hat{\eta}_\nu\right)\varphi\right\rangle$$

$$= 0,$$

最后一个等式 成立是因为 $\operatorname{supp}\left(\hat{H} - \sum_{\nu=-N}^{-1}\hat{\eta}_\nu\right) \subseteq \{\xi \mid |\xi| \leqslant 2^{-N}\}$，因此，当$N$充分大时，

$$\operatorname{supp}\left(\hat{H} - \sum_{\nu=-N}^{-1}\hat{\eta}_\nu\right) \cap \operatorname{supp}\varphi = \varnothing,$$

故

$$\operatorname{supp}\left[f - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=-N}^{-1}\eta_\nu * f + P_N\right)\right]^\wedge = \{0\}.$$

由引理 1.3，存在多项式 P，使得

$$f = P + \lim_{N\to\infty}\left(P_N + \sum_{\nu=-N}^{\infty}\eta_\nu * f\right)$$

在$\mathscr{S}'$意义下成立。

应用定理 1.1，可以得到 Besov 空间的表示定理。

定理1.2 设$\{\eta_\nu\}$如前所述。若 $f \in \dot{B}_p^{\alpha,q}$，其中 $-\infty < \alpha < \infty$，$0 < p < \infty$，$0 < q \leqslant \infty$，则存在多项式 P_N，其次数均不超过 L，L 是不超过$\alpha - n/p$ 的最大非负整数，以及存在多项式 P，使得

$$f = P + \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=-N}^{\infty}\eta_\nu * f + P_N\right)$$

在$\mathscr{S}'$意义下成立。

若 记 $g = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=-N}^{\infty}\eta_\nu * f + P_N\right)$，$P_L$ 是所有次数不超 过 L 的多项式集合，则在模去 P_L 的意义下 g 是唯一被确定的。

定理1.2的最后结论表明，$\dot{B}_p^{\alpha,q}$可以看作由$\mathscr{S}'/P_L$中的等价类组成的。

为证明定理 1.2，我们需要下面的引理。

引理1.8 若 $0<p,q\leqslant\infty,\alpha\in\boldsymbol{R}^1$，则

$$\dot{B}_p^{\alpha,q}\subset\dot{B}_p^{\alpha,\infty}\subset\dot{B}_\infty^{\alpha-n/p,\infty},$$

并且其中的包含关系是连续嵌入。

证明 第一个嵌入是显然的。下面证第二个嵌入关系。设φ满足(1.1)—(1.4)，取$\psi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，使得当$\frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant 2$时$\hat{\psi}(\xi)=1$。这样

$$(\varphi_\nu*f)^\wedge=(\varphi_\nu*f)^\wedge\hat{\psi}_\nu,$$

故

$$\varphi_\nu*f=(\varphi_\nu*f)*\psi_\nu.$$

当$1\leqslant p\leqslant\infty$时，有

$$\|\varphi_\nu*f\|_\infty\leqslant\|\varphi_\nu*f\|_p\|\psi_\nu\|_{p'}=2^{\nu n/p}\|\psi\|_{p'}\|\varphi_\nu*f\|_p.$$

当 $0<p<1$ 时，

$$\begin{aligned}|\varphi_\nu*f(x)|&\leqslant\|\varphi_\nu*f\|_1\|\psi_\nu\|_\infty\\&\leqslant\|\varphi_\nu*f\|_\infty^{1-p}\|\varphi_\nu*f\|_p^p 2^{\nu n}\|\psi\|_\infty,\end{aligned}$$

从而

$$\|\varphi_\nu*f\|_\infty\leqslant 2^{\nu(n/p)}\|\psi\|_\infty^{1/p}\|\psi_\nu*f\|_p.$$

即第二个嵌入关系成立。引理1.8得证。

定理1.2的证明 对任意$f\in\dot{B}_p^{\alpha,q}$，由引理 1.8 知$\|\eta_\nu*f\|_\infty\leqslant C2^{-\nu(\alpha-n/p)}$。取$\psi\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$，满足 $\hat{\psi}(\xi)=1$，当$\frac{1}{2}\leqslant|\xi|\leqslant 2$。记$\psi_\nu(x)=2^{\nu n}\psi(2^\nu x)$.注意到支集条件,有$\eta_\nu*f=\psi_\nu*\eta_\nu*f$.因此

$$\begin{aligned}\|\partial^\gamma\eta_\nu*f\|_\infty&=\|(\partial^\gamma\psi_\nu)*(\eta_\nu*f)\|_\infty\\&\leqslant\|\partial^\gamma\psi_\nu\|_1\|\eta_\nu*f\|_\infty\leqslant 2^{\nu|\gamma|}\|\partial^\gamma\psi\|_1\|\eta_\nu*f\|_\infty\\&\leqslant C2^{\nu(|\gamma|-(\alpha-n/p))}.\end{aligned}$$

故当$|\gamma|>L$时，$\sum_{\nu=-\infty}^{-1}\partial^\gamma\eta_\nu*f$ 一致收敛。由引理1.5知存在多项

式 P_N，其次数不超过 L，使得 $\sum_{\nu=-N}^{-1}\eta_\nu * f + P_N$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛。又由引理1.6知存在多项式 P，使得

$$f = P + \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=-N}^{\infty}\eta_\nu * f + P_N\right)$$

在 $\mathscr{S}'$ 意义下成立。

下面证明 g 的唯一性。设 η^i,$\{P_N^i\}$如上所述，$i=1,2$，使得

$$g^i = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=-N}^{\infty}\eta_\nu^i * f + P_N^i\right)$$

在 $\mathscr{S}'$ 意义下成立。这时 g^1 与 g^2 在 $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ 意义下表示 f，因 g^1-g^2 是多项式。我们将证明，g^1-g^2 的次数不超过 L，即当 $|\beta|>L$ 时，对任意 $\eta\in\mathscr{S}$，有

$$\langle\partial^\beta(g^1-g^2),\eta\rangle=0.$$

设 χ 如引理 1.4 证明中定义的，$\chi_\nu(x)=2^{\nu n}\chi(2^\nu x)$，注意到

$$\operatorname{supp}\left[\sum_{\nu=-N}^{\infty}(\eta_\nu^1-\eta_\nu^2)*f\right]^\wedge(\xi)\subset\{\xi:\ |\xi|\leqslant 2^{-N}\},$$

有

$$\sum_{\nu=-N}^{\infty}(\eta_\nu^1-\eta_\nu^2)*f=\chi_{-N}*\sum_{\nu=-N}^{\infty}(\eta_\nu^1-\eta_\nu^2)*f$$

$$=\sum_{\nu=-N}^{-N+1}\chi_{-N}*(\eta_\nu^1-\eta_\nu^2)*f.$$

由于 P_N^i 的次数不超过 L，故

$$|\langle\partial^\beta(g^1-g^2),\ \eta\rangle|$$

$$=\left|\lim_{N\to\infty}\left\langle\partial^\beta\sum_{\nu=-N}^{\infty}(\eta_\nu^1-\eta_\nu^2)*f-P_N^1+P_N^2,\eta\right\rangle\right|$$

$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\left|\left\langle\partial^\beta\sum_{\nu=-N}^{\infty}(\eta_\nu^1-\eta_\nu^2)*f,\eta\right\rangle\right|$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \sum_{\nu=-N}^{-N+1} \partial^{\beta}\chi_{-N} * (\eta_{\nu}^{1} - \eta_{\nu}^{2}) * f, \eta \right\rangle\right|$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=-N}^{-N+1} \|\partial^{\beta}\chi_{-N}\|_{1} \|(\eta_{\nu}^{1} - \eta_{\nu}^{2}) * f\|_{\infty} \|\eta\|_{1}$$

$$\leqslant C \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=-N}^{-N+1} 2^{-N|\beta|} 2^{-\nu(\alpha - n/p)}$$

$$\leqslant C \lim_{N\to\infty} 2^{-N(|\beta| - \alpha + n/p)} = 0.$$

定理 1.2 证完。

下面我们证明 Besov 空间的原子分解定理。

定理1.3 设 $-\infty<\alpha<\infty, 0<p, q\leqslant\infty, f\in \dot{B}_{p}^{\alpha,q}$，则存在序列 $S=\{S_Q\}$ 与 $\{a_Q\}$，其中指标集 Q 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的全体二进方体，S_Q 是复数，a_Q 是支于 $3Q$ 的 (p,α) 原子，使得

$$f = \sum_{\nu\in Z} \sum_{l(Q)=2^{-\nu}} S_Q a_Q,$$

并且

$$\left\{\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}} |S_Q|^{p}\right)^{q/p}\right\}^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_{p}^{\alpha,q}}, \tag{1.6}$$

这里 $l(Q)$ 表示 Q 的边长。

证明　取引理 1.1 的 h，再令 $\theta=(-\Delta)^{N}h_{\nu}(x)$，它除具有那里所要求的一切性质外，还满足消失矩条件：$\int_{R^n} x^{\gamma}\theta(x)\mathrm{d}x = 0, 0\leqslant|\gamma|\leqslant N$。根据引理 1.2 与定理 1.2，有

$$f = \sum_{\nu\in Z} \theta_{\nu} * \varphi_{\nu} * f$$

$$= \sum_{\nu\in Z} \sum_{l(Q)=2^{-\nu}} \int_{Q} \theta_{\nu}(x-y)\varphi_{\nu} * f(y)\mathrm{d}y.$$

令

$$S_Q = C 2^{\nu n(\alpha/n - 1/p)} \sup_{y\in Q}|\varphi_{\nu} * f(y)|,$$

而

$$a_Q(x)=\frac{1}{S_Q}\int_Q \theta_\nu(x-y)\varphi_\nu*f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 C 是一充分大的常数，使得 a_Q 满足定义 1.2 的条件(2)。显然，a_Q 满足定义 1.2 条件(1)中关于支集的要求，而消失矩条件(3)可由 θ 的消失矩条件直接得到。为验证(1.6)，我们需要下面的引理，它是 Plancherel-Pólya 的一个经典的结果。

引理 1.9 设 $0<p\leqslant\infty,\nu\in \boldsymbol{Z}, g\in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp}\hat{g}\subset\{\xi:|\xi|\leqslant 2^{\nu+1}\}$，$Q$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的二进方体：

$$Q=Q_{\nu k}=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n:$$
$$k_i2^{-\nu}\leqslant x_i<(k_i+1)2^{-\nu}, i=1,2,\cdots,n\},$$

则

$$\left(\sum_{k\in Z^n}\sup_{y\in Q_{\nu k}}|g(y)|^p\right)^{1/p}\leqslant C_{n,p}2^{\nu n/p}\|g\|_p.$$

先用引理 1.9 完成定理 1.3 的证明。事实上，取 $g=\varphi_\nu*f$，则

$$\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}|S_Q|^p\right)^{1/p}=C\Bigg(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}2^{\nu np((\alpha/n)-(1/p))}$$
$$\times\sup_{y\in Q}|\varphi_\nu*f(y)|^p\Bigg)^{1/p}$$
$$=C2^{\nu\alpha}2^{-\nu n/p}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}\sup_{y\in Q}|\varphi_\nu*f(y)|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant C2^{\nu\alpha}\|\varphi_\nu*f\|_p,$$

因此

$$\left\{\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}|S_Q|^p\right)^{q/p}\right\}^{1/q}\leqslant C\left\{\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}\|\varphi_\nu*f\|_p)^q\right\}^{1/q}$$
$$=C\|f\|_{\dot{B}_p^{\alpha,q}}.$$

定理 1.3 得证。

引理 1.9 的证明 我们先证明一个公式。设 $\mathrm{supp}\hat{\psi}\subseteq\{\xi;\ |\xi|\leqslant\pi\}$，且当 $|\xi|\leqslant 2$ 时 $\hat{\psi}(\xi)=1$。记 $\psi_\nu(x)=2^{\nu n}\psi(2^\nu x)$，则有

$$g*\psi_\nu(x)=2^{-\nu n}\sum_{k\in Z^n}g(2^{-\nu}k)\psi_\nu(x-2^{-\nu}k). \qquad (1.7)$$

事实上，由 Paley-Wiener 定理，g 是一个 $2^{\nu+1}$ 型整函数。加上 g 是缓增的，当 j 充分大时，

$$g_\delta(x)=g(x)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sin\delta x_i}{\delta x_i}\right)^j\in L^2.$$

由于 $\mathrm{supp}\left(\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)^\wedge\subset[-\delta,\delta]$，故当 δ 充分小时，$\mathrm{supp}\,\hat{g}_\delta(\xi)\subseteq\{\xi;\ |\xi|\leqslant 2^\nu\pi\}$。于是

$$g_\delta*\psi_\nu(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{g}_\delta(\xi)\hat{\psi}_\nu(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi. \qquad (1.8)$$

把 $\hat{\psi}_\nu(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ 对每个变元按周期 $2^{\nu+1}\pi$ 延拓到全空间 $\boldsymbol{R}^n$，并展开成 Fourier 级数。由反演公式，其 Fourier 系数可表为

$$C_k=\frac{1}{(2^{\nu+1}\pi)^n}\int_{|x_j|\leqslant 2^\nu\pi}\hat{\psi}_\nu(\xi)e^{ix\cdot\xi}e^{-i2^{-\nu}k\xi}d\xi$$

$$=2^{-\nu n}\psi_\nu(x-2^{-\nu}k).$$

因此当 $|\xi|\leqslant 2^\nu\pi$ 时，

$$\hat{\psi}_\nu(\xi)e^{ix\cdot\xi}=2^{-\nu n}\sum_{k\in Z^n}\psi_\nu(x-2^{-\nu}k)e^{i2^{-\nu}k\cdot\xi}. \qquad (1.9)$$

把(1.9)代入(1.8)，再一次用 Fourier 反演公式，便得

$$g_\delta*\psi_\nu(x)=2^{-\nu n}\sum_{k\in Z^n}\psi_\nu(x-2^{-\nu}k)g_\delta(2^{-\nu}k).$$

令 $\delta\to 0$ 取极限，应用 Lebesgue 控制收敛定理，便得公式 (1.7)。

对 $g^y(x)=g(x+y)$ 应用公式 (1.7)，有

$$g(x+y)=\psi_\nu * g^y(x)=2^{-\nu n}\sum_{k\in Z^n} g(2^{-\nu}k+y)\psi_\nu(x-2^{-\nu}k),$$

其中第一个等式成立，只要看它们的 Fourier 变换便知。因此，对任意 $y\in Q_{\nu k}$，

$$\sup_{z\in Q_{\nu k}}|g(z)|\leqslant\sup_{|x|\leqslant\sqrt{n}2^{-\nu}}|g(x+y)|$$

$$\leqslant 2^{-\nu n}\sum_{k\in Z^n} g(2^{-\nu}k+y)\sup_{|x|\leqslant\sqrt{n}2^{-\nu}}|\psi_\nu(x-2^{-\nu}k)|。$$

由于 $\psi\in\mathscr{S}(R^n)$，有

$$\sup_{|x|\leqslant\sqrt{n}2^{-\nu}}|\psi_\nu(x-2^{-\nu}k)|\leqslant C_M 2^{\nu n}(1+|k|)^{-M},$$

其中 M 可取得任意大. 当 $0<p\leqslant 1$ 时用 $|a+b|^p\leqslant|a|^p+|b|^p$，当 $p>1$ 时用 Hölder 不等式，便得到

$$\sup_{z\in Q_{\nu k}}|g(z)|^p\leqslant C_p\sum_{k\in Z^n}|g(2^{-\nu}k+y)|(1+|k|)^{-n-1}$$

对任意 $y\in Q_{\nu k}$ 成立。对 y 在 $Q_{\nu k}$ 上积分，得

$$2^{-\nu n}\sup_{z\in Q_{\nu k}}|g(z)|^p\leqslant C_p\sum_{k\in Z^n}(1+|k|)^{-n-1}\int_{Q_{\nu k}}|g(x)|^p dx,$$

对 k 求和，便推出

$$2^{-\nu n}\sum_{k\in Z^n}\sup_{z\in Q_{\nu k}}|g(z)|^p\leqslant C_p\|g\|_p^p\sum_{k\in Z^n}(1+|k|)^{-n-1}$$

$$=C_{pn}\|g\|_p^p,$$

这就是引理 1.9 所要求的。

为证明定理 1.3 的逆，我们引入 (p,a) 分子的概念。

定义1.4 函数 m 被称为 (p,a) 分子，如果存在 $\mu\in\boldsymbol{Z}$，$x_0\in\boldsymbol{R}^n$，满足

(1) $|\partial^\gamma m(x)|\leqslant 2^{\mu(n/p-a+|\gamma|)}(1+2^\mu|x-x_0|)^{-M-|\gamma|}$，只要 $0\leqslant|\gamma|\leqslant K$；

(2) $\int_{R^n} x^\gamma m(x)\mathrm{d}x = 0,\quad 0\leqslant|\gamma|\leqslant N,$

其中M是充分大，例如$M\geqslant N+10n\max\left(\frac{1}{p},1\right)$，$K\geqslant([\alpha]+1)_+$，$N\geqslant\max\left(\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)_+-\alpha\right],-1\right)$都是整数。

显然，每个(p,α)原子都是(p,α)分子。

定理1.4 设$-\infty<\alpha<\infty$，$0<p,q\leqslant\infty$。若

$$f=\sum_{\mu\in Z}\sum_{l(Q)=2^{-\mu}} S_Q m_Q,$$

$$\sum_{\mu\in Z}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^p\right)^{q/p}<\infty,$$

其中m_Q是(p,α)分子，Q是R^n的二进方体，则$f\in\dot{B}_p^{\alpha,q}$，且

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\alpha,q}}\leqslant C\left(\sum_{\mu\in Z}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q},$$

其中C是与f无关的常数。

为证明定理1.4，需要下面的两个引理。

引理1.10 设φ_ν满足条件(1.1)—(1.4)，m_Q是(p,α)分子，$l(Q)=2^{-\mu}$，Q的左下顶点为x_0，则当$\mu\geqslant\nu$时，

$$|\varphi_\nu*m_Q(x)|\leqslant C2^{\mu(n/p-\alpha)}2^{-(\mu-\nu)(N+1+n)}(1+2^\nu|x-x_0|)^{N+1+n-M}\tag{1.10}$$

成立；当$\mu\leqslant\nu$时，

$$|\varphi_\nu*m_Q(x)|\leqslant C2^{\mu(n/p-\alpha)}2^{-(\nu-\mu)K}(1+2^\mu|x-x_0|)^{N+1+n-M}\tag{1.11}$$

成立。

证明 先证明1.10。由于对平移与展缩变换的不变性，不妨设$\nu=0,x_0=0$，并记$\varphi_0=\varphi,m_Q=m$。由(p,α)分子的消失矩条件，有

$$\varphi*m(x)=\int_{R^n}m(x-y)\left[\varphi(y)-\sum_{|\beta|<N}\partial^\beta\varphi(x)(y-x)^\beta/\beta!\right]\mathrm{d}y.$$

因此

$$
\begin{aligned}
|\varphi * m(x)| &\leqslant \left(\int_{|x-y|<|x|/2} + \int_{|x-y|\geqslant|x|/2}\right)|m(x-y)| \\
&\quad \times |x-y|^{N+1}\Phi(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II},
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(x,y) = \sup\limits_{|\beta|=N+1} \sup\limits_{0<\varepsilon<1} |\partial^\beta \varphi(x+\varepsilon(y-x))|/\beta!$.由 $\varphi \in \mathscr{S}$ 知 $\Phi(x,y) \leqslant C(1+|x|)^{N+1+n-M}$,只要 $|x-y| \leqslant |x|/2$。故

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &\leqslant C\int_{R^n} |m(x-y)|\,|x-y|^{N+1}\mathrm{d}y(1+|x|)^{N+1+n-M} \\
&\leqslant C2^{\mu(n/p-\alpha)}\int_{R^n}(1+2^\mu|y|)^{-M}|y|^{N+1}\mathrm{d}y(1+|x|)^{N+1+n-M} \\
&\leqslant C2^{\mu(n/p-\alpha)}2^{-\mu(N+1+n)}(1+|x|)^{N+1+n-M},
\end{aligned}
$$

又由 $\Phi(x,y)$ 有界知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &\leqslant \int_{|x-y|>|x|/2} |m(x-y)|\,|x-y|^{N+1}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C2^{\mu(n/p-\alpha)}\int_{|y-x|\geqslant|x|/2}(1+2^\mu|x-y|)^{-M}|x-y|^{N+1}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C2^{\mu(n/p-\alpha)}2^{-\mu(N+1+n)}(1+|x|)^{N+1+n-M},
\end{aligned}
$$

(1.10)获证。改变 φ 与 m 的地位，利用 φ 有任意阶消失矩的条件，我们可以从 m 中减去一个 $k-1$ 阶 Taylor 多项式，再根据 (p,α) 分子的大小条件，就可类似地证得(1.11)。

引理1.11 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$\mu,\tau\in \boldsymbol{Z}$，$\tau\leqslant\mu$。若 $F(x) = \sum\limits_{l(Q)=2^{-\mu}} S_Q f_Q$，其中 f_Q 满足

$$
|f_Q(x)| \leqslant 2^{\mu(n/p-\alpha)}(1+2^\tau|x-x_Q|)^{-n-1},
$$

这里 x_Q 是二进方体Q的左下顶点，则

$$
\|F\|_p \leqslant C2^{-\mu\alpha}2^{(\mu-\tau)n}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^p\right)^{1/p}.
$$

证明 设 S 是任意边长为 $2^{-\mu}$ 的二进方体，x_s 是 S 的左下顶点，则

$$\|F\|_p^p = \sum_{l(S)=2^{-\mu}} \int_S |F|^p dx$$

$$\leqslant C \sum_{l(S)=2^{-\mu}} 2^{-\mu n}$$

$$\times \left[2^{\mu(n/p-\alpha)} \sum_{l(Q)=2^{-\mu}} |S_Q| (1+2^\nu |x_s - x_Q|)^{-n-1} \right]^p.$$

记 $x_Q = 2^{-\mu}k, x_S = 2^{-\mu}l$，其中 $k, l \in \boldsymbol{Z}^n$，并记 $S_Q = S_k$。由 Young 不等式，得

$$\|F\|_p^p \leqslant C 2^{-\mu\alpha p} \sum_{l\in Z^n} \left(\sum_{k\in Z^n} |S_k| (1+2^{\nu-\mu}|k-l|)^{-n-1} \right)^p$$

$$\leqslant C 2^{-\mu\alpha p} \left(\sum_{k\in Z^n} |S_k|^p \right) \left(\sum_{l\in Z^n} (1+2^{\nu-\mu}|l|)^{-n-1} \right)^p$$

$$\leqslant C 2^{-\mu\alpha p} \left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}} |S_Q|^p \right) 2^{(\mu-\nu)np}.$$

定理1.4的证明 考虑

$$\varphi_\nu * \sum_{\mu\in Z} \sum_{l(Q)=2^{-\mu}} S_Q m_Q = \varphi_\nu * \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\nu} + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \right) \sum_{l(Q)=2^{-\mu}} S_Q m_Q.$$

当 $0<p\leqslant1$ 时，由引理1.10及 p-三角不等式 $|a+b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p$，有

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\alpha,q}}^q \leqslant C \sum_{\nu\in Z} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\nu} 2^{-(\nu-\mu)(k-\alpha)p} \sum_{l(Q)=2^{-\mu}} |S_Q|^p \right)^{q/p}$$

$$+ C \sum_{\nu\in Z} \left(\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} 2^{-(\mu-\nu)(N+1+n-(n/p)+\alpha)p} \sum_{l(Q)=2^{-\mu}} |S_Q|^p \right)^{q/p}.$$

注意到 $k-\alpha>0$ 以及 $N+1+n-\dfrac{n}{p}+\alpha>0$，当 $q\geqslant p$ 时应用 Yo-

ung 不等式，当 $q\leqslant p$ 时用 q/p-三角不等式以及 $\|s*r\|_{l^1}\leqslant\|s\|_{l^1}\|r\|_{l^1}$，便可推出定理1.4所要求的结论。

当$1<p\leqslant\infty$时，证明是类似的。对 $\mu>\nu$ 用(1.10)以及引理1.11(取 $\tau=\nu$)。对 $\mu\leqslant\nu$ 用式(1.11)以及引理1.11(取 $\tau=\mu$)。于是

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\alpha,q}}^q\leqslant C\sum_{\nu\in Z}\Big(\sum_{\mu=-\infty}^{\nu}2^{(\nu-\mu)(k-\alpha)}\Big(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^p\Big)^{1/p}\Big)^q$$

$$+C\sum_{\nu\in Z}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}2^{-(\mu-\nu)(N+1+\alpha)}\Big(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^p\Big)^{1/p}\Big)^q.$$

注意到 $k-\alpha>0$ 以及 $N+1+\alpha>0$，再分别考虑 $q\geqslant1$ 与$q<1$两种情形，类似于前面的讨论，便可得所要求的结果。

下面看一个特殊情形：$\alpha=0$，$p=q$，即 $\dot{B}_p^{0,p}$。这时，$(p,0)$ 原子的条件(1)，(3)(定义1.2)与 H^p 空间的(p,∞)原子的相同，(2)中当 $\gamma=0$ 时，$|a(x)|\leqslant|Q|^{-1/p}$，正是$(p,\infty)$原子的大小条件。当然，$(0,p)$原子的条件(2)比 H^p 空间的(p,∞)原子要求要多，这就是(2)中$|\gamma|>0$的要求，即光滑性条件

$$|\partial^\gamma a(x)|\leqslant|Q|^{-\frac{1}{p}-\frac{|\gamma|}{n}},\qquad |\gamma|\leqslant K,\tag{1.12}$$

其中$K\geqslant1$。另外，分解定理1.3中相应于系数的条件，正是以前说的$\sum|\lambda_j|^p<\infty$。由此可见，当 $0<p\leqslant1$ 时，$\dot{B}_p^{0,p}\subset H^p$。由于$(0,p)$原子要求光滑性，可以推想，$\dot{B}_p^{0,p}\neq H^p$。而事实上也的确是这样。因此，结论是，当$0<p\leqslant1$时，$\dot{B}_p^{0,p}\subsetneqq H^p$，并且，空间

$\{\sum\lambda_ja_j\,|\,\sum|\lambda_j|^p<\infty$，$a_j$是$(p,\infty)$原子，且满足(1.12)$\}$

当 $K=0$ 时，它是 H^p；当 $K\geqslant1$ 时，它是 $\dot{B}_p^{0,p}$。

§9.2 Triebel-Lizorkin空间的原子刻画

设$-\infty<\alpha<\infty$，$0<p,q\leqslant\infty$，$\{\varphi_\nu\}_{\nu\in Z}$满足§9.1中条件(1.1)—(1.4)。

定义2.1 称$f\in\mathscr{S}'/\mathscr{P}$(即广义函数模去多项式)属于 Trie-

bel-Lizorkin 空间 $\dot{F}_p^{\alpha,q}$，如果

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}}=\left\|\left(\sum_{\nu\in \mathbf{Z}}2^{\nu\alpha}|\varphi_\nu*f(x)|^q\right)^{1/q}\right\|_p<\infty.$$

这定义类似于 Besov 空间 $\dot{B}_p^{\alpha,q}$ 的定义，只是改变了 L^p与 l^q 的地位。

类似于对 Besov 空间的说明，空间$\dot{F}_p^{\alpha,q}$ 与 φ_ν 的选择无关.又 $\dot{F}_p^{\alpha,q}$ 中的“点”，表示齐次 Triebel-Lizorkin 空间。对非齐次 Triebel-Lizorkin 空间，有类似的结果。

比起 Besov 空间， Triebel-Lizorkin 空间与一些经典的空间，有着更直接的关系。事实上，对 $\alpha=0$，$q=2$，表达式 $\left(\sum_{\nu\in \mathbf{Z}}|\varphi_\nu*f(x)|^2\right)^{1/2}$ 正是经典的 Littlewood-Paley 的 g 函数的离散形式。因此，当 $p>1$ 时，它属于 L^p 也就是意味着 $f\in L^p$，即 $L^p=\dot{F}_p^{0,2}$。事实上，还有 $H^p=\dot{F}_p^{0,2}$，当 $0<p\leqslant 1$，以及位势空间 $L_\alpha^p=\dot{F}_p^{\alpha,2}(1<p<\infty)$。特别地，当 α 为正整数时，Sobolev 空间也就是 $L_\alpha^p=\dot{F}_p^{\alpha,2}$。

为了得到 Triebel-Lizorkin 空间的原子分解，我们需要作一系列的准备。

定理2.1 (C.Fefferman-E.M.Stein) 设 $1<p<\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则

$$\left\|\left[\sum_{j=1}^{\infty}(M(f_j))^q\right]^{1/q}\right\|_p\leqslant C_{pq}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^q\right)^{1/q}\right\|_p \tag{2.1}$$

对任意序列$\{f_j\}$成立，只要 f_j 局部可积，其中 $M(f_j)$表示 f_j的 Hardy-Littlewood 极大函数。

定理 2.1 的证明中，需要下面的引理。显然，这引理本身是有独立意义的。

引理2.1 设 $f\geqslant 0$，$\varphi\geqslant 0$，$q>1$，则

$$\int_{\mathbf{R}^n}M(f)(x)^q\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{B}_q\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^qM(\varphi)(x)\mathrm{d}x,$$

其中B_q与f,φ无关。

我们先证明定理2.1，然后再证明引理2.1。

定理2.1的证明 当$p=q$时，

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}(M(f_j))^q\right)^{1/q}\right\|_q^q=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{R^n}(M(f_j))^q\mathrm{d}x\leqslant A_q\sum_{j=1}^{\infty}\int_{R^n}|f_j|^q\mathrm{d}x$$

$$=A_q\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^q\right)^{1/q}\right\|_q^q,$$

即(2.1)成立。

下面证明弱(1,1)型，即证

$$\left|\left\{x\,\middle|\,\left[\sum_{j=1}^{\infty}(M(f_j)(x))^q\right]^{1/q}>\alpha\right\}\right|\leqslant\frac{A_1}{\alpha}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^q\right)^{1/q}\right\|_1 \quad (2.2)$$

成立。

对$G(x)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(x)|^q\right)^{1/q}$与$\alpha>0$作Calderón-Zygmund分解，得到$\boldsymbol{R}^n=F\cup\Omega$，$\Omega=\cup Q_j$，$Q_j$是$\boldsymbol{R}^n$中互不重叠的方体，满足：

(i) $\sum_j|Q_j|=|\Omega|\leqslant\frac{A}{\alpha}\|G\|_1$;

(ii) $G(x)\leqslant\alpha$，当$x\in F$;

(iii) $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}G(x)\mathrm{d}x\leqslant A\alpha$。

令$f_j=f'_j+f''_j$，其中$f'_j=f_j\chi_F$，$f''_j=f_j\chi_\Omega$。为证(2.2)，只要证明

$$\left|\left\{x\,\middle|\,\left(\sum_{j=1}^{\infty}(M(f'_j)(x))^q\right)^{1/q}>\alpha\right\}\right|\leqslant\frac{A_1}{\alpha}\|G\|_1, \quad (2.3)$$

$$\left|\left\{x\,\middle|\,\left(\sum_{j=1}^{\infty}(M(f''_j)(x))^q\right)^{1/q}>\alpha\right\}\right|\leqslant\frac{A}{\alpha}\|G\|_1. \quad (2.4)$$

用$p=q$时的结果，并注意到$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f'_j(x)|^q\right)^{1/q}\leqslant\alpha$，有

$$\alpha^q\left|\left\{x\left|\left(\sum_{j=1}^{\infty}(M(f'_j)(x))^q\right)^{1/q}>\alpha\right.\right\}\right|\leqslant\int_{R^n}\sum_{j=1}^{\infty}(M(f'_j)(x))^q\mathrm{d}x$$

$$\leqslant A_q\int_{R^n}\sum_{j=1}^{\infty}|f'_j(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant A_q\alpha^{q-1}\int_{R^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f'_j(x)|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant A_q\alpha^{q-1}\|G\|_1,$$

这就是(2.3)。

为证(2.4)，定义函数

$$\tilde{f}_j(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}|f_j(y)|\mathrm{d}y, & \text{当}x\in Q_k,\\ 0, & \text{当}x\notin\Omega.\end{cases}$$

当 $x\in Q_k$ 时，用向量值的 Minkowsky 不等式与性质(iii)，

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{f}_j(x)|^q\right)^{1/q}=\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f_j(y)|\mathrm{d}y\right)^q\right]^{1/q}$$

$$\leqslant\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(y)|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}y\leqslant A\alpha.$$

注意到当 $x\notin\Omega$ 时，$\tilde{f}_j=0$，因此

$$\alpha^q\left|\left\{x\left|\left[\sum_{j=1}^{\infty}(M(\tilde{f}_j)(x))^q\right]^{1/q}>\alpha\right.\right\}\right|$$

$$\leqslant\int_{R^n}\sum_{j=1}^{\infty}(M(\tilde{f}_j)(x))^q\mathrm{d}x\leqslant A_q\int_{R^n}\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{f}_j(x)|^q\mathrm{d}x$$

$$\leqslant A\alpha^{q-1}\int_{R^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(y)|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}x$$

$$=A\alpha^{q-1}\|G\|_1. \tag{2.5}$$

下面我们要用 $M(\tilde{f}_j)$控制 $M(f''_j)$。对任意方体 $Q\subset\boldsymbol{R}^n$，令 $\tilde{Q}=2nQ$，即与Q 同中心，边长伸展 $2n$ 倍的方体。$\tilde{\Omega}=\bigcup_j\tilde{Q}_j$。显然

$$|\tilde{\Omega}|\leqslant\frac{A}{a}\|G\|_1.$$

由此可见，只要证明，当 $x\notin\tilde{\Omega}$ 时，$M(f_j'')(x)\leqslant AM(\tilde{f}_j)(x)$，则(2.4)得证。由于

$$M(f_j'')(x)\sim\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_j''(y)|\,\mathrm{d}y.$$

而只要 $x\in Q$，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_j''(y)|\,\mathrm{d}y=\frac{1}{|Q|}\sum_{k\in K}\int_{Q_k\cap Q}|f_j''(y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中 $K=\{k\,|\,Q_k\cap Q\neq\varnothing\}$。另一方面 $Q_k\cap Q\neq\varnothing$，$x\in Q\setminus\tilde{\Omega}\subset Q\setminus\tilde{Q}_k$ 蕴含了 $Q_k\subseteq\tilde{Q}$。于是

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_j''(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{|Q|}\sum_{k\in K}\int_{Q_k}|f_j''(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{|Q|}\sum_{k\in K}\int_{Q_k}|\tilde{f}_j(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}}|\tilde{f}_j(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{A}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|\tilde{f}_j(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant AM\tilde{f}_j(x).$$

结合(2.5)便得到(2.4)，从而证明了(2.2)。用 Marcinkiewicz 内插定理，知(2.1)对 $1<p\leqslant q$ 成立。

下面用引理2.1证明式(2.1)对 $q<p<\infty$ 成立。设 $p>q>1$。令 $r=\frac{p}{q}$。根据引理2.1，对任意 $\varphi\in L^{r'}$，其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$，有

$$\int_{R^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(M(f_j)(x))^q\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{R^n}(M(f_j)(x))^q\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant B_q\sum_{j=1}^{\infty}\int_{R^n}|f_j(x)|^qM(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant B_q \left\| \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\cdot)|^q \right\|_{L^r} \cdot \|M(\varphi)\|_{L^{r'}}$$

$$\leqslant B_{qr} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\cdot)|^q \right\|_{L^r} \|\varphi\|_{L^{r'}}.$$

对$\|\varphi\|_{L^{r'}} \leqslant 1$取上确界，便得

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} |M(f_j)(\cdot)|^q \right\|_{L^r} \leqslant B_{qr} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\cdot)|^q \right\|_{L^r}.$$

这就是(2.1)，从而定理2.1证完。

引理2.1的证明 首先考虑二进极大函数

$$M_d(f)(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y,$$

其中上确界是对所有包含x的二进方体Q取的。我们要证明，M_d是$L^q(\boldsymbol{R}^n, M(\varphi)(x)\mathrm{d}x)$到$L^q(\boldsymbol{R}^n, \varphi(x)\mathrm{d}x)$有界的。显然，$q=\infty$时，这结果成立。剩下来要证$M_d$是弱(1,1)型的，用Calderón-Zygmund分解，$\{x \in \boldsymbol{R}^n:\ M_d(f)(x) > \alpha\} = \bigcup Q_k$，$Q_k$互不重叠，且

$$\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x) \mathrm{d}x \sim \alpha.$$

这样

$$\int_{Q_k} f(x) M(\varphi)(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_{Q_k} f(x) \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} \varphi(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= \int_{Q_k} \varphi(y) \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \sim \alpha \int_{Q_k} \varphi(y) \mathrm{d}y.$$

对k求和，有

$$\alpha \int_{\{x | M_d(f)(x) > \alpha\}} \varphi(y) \mathrm{d}y \leqslant A \int_{\{x | M_d(f)(x) > \alpha\}} f(x) M(\varphi)(x) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant A \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x) M(\varphi)(x) \mathrm{d}x,$$

这就是所要证明的弱(1,1)型等式。由 Marcinkiewicz 内插定理，知 M_d: $L^q(\boldsymbol{R}^n, M(\varphi)(x)\mathrm{d}x) \to L^q(\boldsymbol{R}^n, \varphi(x)\mathrm{d}x)$有界，其中 $1<q<\infty$。现在要从 M_d 推出M的相应结果。令

$$M_N(f)(x) = \sup \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中上确界的Q取遍所有包含x且其边长不超过N的方体。由于 $M_N(f)(x) \uparrow M(f)(x)$，因此只要证明

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} M_N(f)(x)^q \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant B_q \int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|^q M(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x.$$

由齐次性，只需对 $N=1$证明M_1 满足上述不等式。而显然有

$$M_1(f)(x) \leqslant C\int_{Q_0} M_d^t(f)(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $M_d^t(f)(x) = M_d(\tau_t f)(x+t)$， $\tau_t f(x) = f(x-t)$， Q_0 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的单位立方体。引理 2.1 证完。

定义2.2 设$f \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，$\lambda>0$，定义极大函数 $\varphi_\nu^{**}(f)$为

$$\varphi_\nu^{**}(f)(x) = \sup_{y\in \boldsymbol{R}^n} \frac{|\varphi_\nu * f(x-y)|}{(1+2^\nu|y|)^\lambda},$$

其中 φ_ν 满足 § 9.1中条件(1.1)—(1.4)。

注意到 $f\in\mathscr{S}'$，$\widehat{\varphi_\nu * f}$具有紧支集，因此，$\varphi_\nu * f$ 是指数型整函数，故上述定义有意义。显然，$|\varphi_\nu * f(x)| \leqslant \varphi_\nu^{**}(f)(x)$。

更一般地，如果g是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数，令

$$g_\lambda^{**}(x) = \sup_{y\in \boldsymbol{R}^n} \frac{|g(x-y)|}{(1+|y|)^\lambda}.$$

若 $g\in C^1$，则定义

$$(\nabla g)_\lambda^{**} = \sup_{y\in \boldsymbol{R}^n} \frac{|\nabla g(x-y)|}{(1+|y|)^\lambda},$$

其中$|\nabla g|$是梯度 ∇g 的范数。

引理2.2 设$\lambda>0$，$g\in\mathscr{S}'(R^n)$，$\operatorname{supp}\hat{g}\subseteq\{\xi: |\xi|\leqslant 2\}$，则

$$(\nabla g)_\lambda^{**}(x)\leqslant C_{\lambda,n}g_\lambda^{**}(x).$$

证明 记$\partial_j g=\frac{\partial g}{\partial x_j}$。取$\gamma\in\mathscr{S}(R^n)$，满足$\hat{\gamma}(\xi)=1$，当$|\xi|\leqslant 2$。这时$g=\gamma*g$。

$$|\partial_j g(x-y)|\leqslant\int_{R^n}|\partial_j\gamma(x-y-z)||g(z)|\mathrm{d}z$$

$$=\int_{R^n}|\partial_j\gamma(z-y)||g(x-z)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant\int_{R^n}|\partial_j\gamma(z-y)|(1+|z-y|)^\lambda(1+|y|)^\lambda\frac{|g(x-z)|}{(1+|z|)^\lambda}\mathrm{d}z,$$

最后一个不等式成立是因为

$$1+|z|\leqslant 1+|z-y|+|y|\leqslant(1+|z-y|)(1+|y|).$$

因此

$$|\partial_j g(x-y)|$$
$$\leqslant g_\lambda^{**}(x)(1+|y|)^\lambda\int_{R^n}|\partial_j\gamma(z-y)|(1+|z-y|)^\lambda\mathrm{d}z.$$

注意到$\partial_j\gamma\in\mathscr{S}$，便有

$$|\partial_j g(x-y)|\leqslant C_{\lambda,n}g_\lambda^{**}(x)(1+|y|)^\lambda,$$

故

$$(\partial_j g)_\lambda^{**}(x)\leqslant C_{\lambda,n}g_\lambda^{**}(x),$$

从而

$$(\nabla g)_\lambda^{**}(x)\leqslant C_{\lambda,n}g_\lambda^{**}(x).$$

我们现在要用Hardy-Littlewood极大函数来控制g_λ^{**}。

引理2.3 设$\lambda>0$，$g\in\mathscr{S}'$，$\operatorname{supp}\hat{g}\subseteq\{\xi: |\xi|\leqslant 2\}$，$r=n/\lambda$，且对所有的$x$，$g_\lambda^{**}(x)<\infty$，则

$$g_\lambda^{**}(x)\leqslant C_{\lambda,n}(M(|g|^r)(x))^{1/r}.$$

证明 取δ满足$0<\delta<1$，对以$x-y$为中心以δ为半径的球

$B(x-y,\delta)$中的任意 z，显然有

$$|g(x-y)|\leqslant|g(z)|+C\delta\sup_{\tilde{z}\in B(x-y,\delta)}|\nabla g(\tilde{z})|.$$

两边取 r 次幂，然后在 $B(x-y,\delta)$上积分，得

$$|g(x-y)|^r\leqslant C_{r,n}\delta^{-n}\int_{B(x-y,\delta)}|g(z)|^r\mathrm{d}z$$
$$+C_r\delta^r\sup_{\tilde{z}\in B(x-y,\delta)}|\nabla g(\tilde{z})|^r.$$

由于 $B(x-y,\delta)\subseteq B(x,\delta+|y|)$，便有

$$\int_{B(x-y,\delta)}|g(z)|^r\mathrm{d}z$$
$$\leqslant\int_{B(x,\delta+|y|)}|g(z)|^r\mathrm{d}z\leqslant C_n(\delta+|y|)^nM(|g|^r)(x).$$

同时

$$\sup_{\tilde{z}\in B(x-y,\delta)}|\nabla g(\tilde{z})|\leqslant\sup_{\tilde{z}\in B(x,\delta+|y|)}|\nabla g(\tilde{z})|$$
$$=\sup_{|\omega|\leqslant\delta+|y|}|\nabla g(x+\omega)|$$
$$\leqslant(1+\delta+|y|)^\lambda(\nabla g)_\lambda^{**}(x).$$

由 $0<\delta<1$，有$1+|y|\sim1+\delta+|y|$，并注意到 $\lambda=\frac{n}{r}$，故

$$|g(x-y)|\leqslant C_{r,n}\delta^{-n/r}(\delta+|y|)^{n/r}(M(|g|^r)(x))^{1/r}$$
$$+C_r\delta(1+\delta+|y|)^\lambda(\nabla g)_\lambda^{**}(x)$$
$$\leqslant(1+\delta+|y|)^\lambda[C_{r,n}\delta^{-n/r}(M(|g|^r)(x))^{1/r}$$
$$+C_r\delta(\nabla g)_\lambda^{**}(x)]$$
$$\leqslant(1+|y|)^\lambda[C_{r,n}\delta^{-n/r}(M(|g|^r)(x))^{1/r}$$
$$+C_r\delta(\nabla g)_\lambda^{**}(x)].$$

从而

$$g_\lambda^{**}(x)\leqslant C_{r,n}\delta^{-n/r}(M(|g|^r)(x))^{1/r}+C_r\delta(\nabla g)_\lambda^{**}(x).$$

应用引理2.2，并由于处处有 $g_\lambda^{**}(x)<\infty$，可取 δ 充分小，使得

$C_r\delta(\nabla g)_\lambda^{**}(x)<\frac{1}{2}g_\lambda^{**}(x)$。于是

$$g_\lambda^{**}(x)\leqslant C_{\lambda,n}(M(|g|^r)(x))^{1/r}.$$

引理2.4 设$0<p\leqslant\infty$，$g\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$且$\operatorname{supp}\hat{g}\subseteq\{\xi:|\xi|\leqslant2\}$，则$g\in L^\infty$，且

$$\sup_{z\in R^n}|g(z)|\leqslant C_{n,p}\|g\|_p.$$

特别地，$g_\lambda^{**}(x)<\infty$对任意$\lambda>0$与$x\in\boldsymbol{R}^n$成立。

证明 这实际上是引理1.9的一个推论。

引理2.5 设$\lambda>0$，$r=\frac{n}{\lambda}$，$0<p\leqslant\infty$，$\nu\in\boldsymbol{Z}$，$f\in\mathscr{S}'$. 若$\varphi_\nu*f\in L^p$，则

$$\varphi_\nu^{**}(f)(x)\leqslant C_{r,n}(M(|\varphi_\nu*f|^r)(x))^{1/r}.$$

证明 记$g(x)=\varphi_\nu*f(2^{-\nu}x)$，则由引理2.4，有

$$\sup_{z\in R^n}|\varphi_\nu*f(z)|\leqslant C_{n,p}\|\varphi_\nu*f\|_p<\infty,$$

因此$\sup_{x\in R^n}|g(x)|<\infty$，从而$g_\lambda^{**}(x)<\infty$，对任意$x\in\boldsymbol{R}^n$。由引理2.3，知

$$g_\lambda^{**}(x)\leqslant C_{r,n}M(|g|^r)^{1/r}(x).$$

而

$$\begin{aligned}g_\lambda^{**}(x)&=\sup_{y\in R^n}\frac{|\varphi_\nu*f(2^{-\nu}(x-y))|}{(1+|y|)^\lambda}\\&=\sup_{y\in R^n}\frac{|\varphi_\nu*f(2^{-\nu}x-y)|}{(1+2^\nu|y|)^\lambda}\\&=\varphi_\nu^{**}(f)(2^{-\nu}x),\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}M(|g|^r)(x)&=\sup_{R>0}\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)}|\varphi_\nu*f(2^{-\nu}y)|^r\mathrm{d}y\\&=\sup_{R>0}\frac{1}{|B(2^{-\nu}x,2^{-\nu}R)|}\int_{B(2^{-\nu}x,2^{-\nu}R)}|\varphi_\nu*f(y)|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= M(|\varphi_\nu * f|^r)(x),$$

令 $2^{-\nu}x = z$，便得

$$\varphi_\nu^{**}(f)(z) \leqslant C_{r,n}(M(|\varphi_\nu * f|^r)(z))^{1/r},$$

这就是所要证明的，证毕。

定理2.2 设 $-\infty < \alpha < \infty$，$0 < q \leqslant \infty$，$0 < p < \infty$，$\{\varphi_\nu\}$满足§9.1中条件(1.1)—(1.4)，$\lambda > n/\min(p,q)$，则在$\mathscr{S}'/\mathscr{P}$，有

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}} \sim \left\|\left(\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}|\varphi_\nu^{**}(f)|)^q\right)^{1/q}\right\|_p.$$

这定理说明，可以用 φ_ν^{**} 刻画 $\dot{F}_p^{\alpha,q}$。

证明 设 $f\in \dot{F}_p^{\alpha,q}$，这时 $\varphi_\nu * f \in L^p$。由引理2.5，注意到 $r = \dfrac{n}{\lambda} < \min(p,q)$，我们可以应用向量值极大函数不等式（2.1），得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}|\varphi_\nu^{**}(f)|)^q\right)^{1/q}\right\|_p \\
&\leqslant C_{r,n}\left\|\left(\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}M^{1/r}(|\varphi_\nu * f|^r))^q\right)^{1/q}\right\|_p \\
&= C_{r,n}\left\|\left(\sum_{\nu\in Z}M(2^{\nu\alpha r}|\varphi_\nu * f|^r)^{q/r}\right)^{r/q}\right\|_{L^{p/r}}^{1/r} \\
&\leqslant C_{r,n,p,q}\left\|\left(\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha r}|\varphi_\nu * f|^r)^{q/r}\right)^{r/q}\right\|_{L^{p/r}}^{1/r} \\
&\leqslant C_{r,n,p,q}\left\|\left(\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}|\varphi_\nu * f|)^q\right)^{1/q}\right\|_p \\
&= C_{r,n,p,q}\|f\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}}.
\end{aligned}$$

另一方向的控制是显然的，因为$|\varphi_\nu * f(x)| \leqslant \varphi_\nu^{**}(f)(x)$。

现在我们可以讨论 $\dot{F}_p^{\alpha,q}$ 的原子分解了。

定义2.3 函数 $a(x)$ 称为光滑原子，如果

(1) $\operatorname{supp} a \subset 3Q$，其中 Q 是方体；

(2) $|\partial^\gamma a(x)| \leqslant |Q|^{1/2-|\gamma|/n}$，　当 $0 \leqslant |\gamma| \leqslant [\alpha]_+ + 1$；

(3) $\int_{R^n} x^\gamma a(x)\mathrm{d}x = 0$, 当 $0 \leqslant |\gamma| \leqslant L$,

其中 $L = \max([J-n-\alpha], [J-n])$, $J = n/\max(1,p,q)$, $[\alpha]_+ \equiv \max([\alpha],0)$。注意，当$L \leqslant -1$时，意味着不需要消失矩的条件。

定理2.3 设 $-\infty < \alpha < \infty, 0 < p < \infty, 0 < q \leqslant \infty$。若 $f \in \dot{F}_p^{\alpha,q}$，则 $f = \sum_Q S_Q a_Q$，其中 Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的二进方体，a_Q 是光滑原子，$\{S_Q\}$ 满足

$$\left\| \left[\sum_{\nu \in Z} \left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}} |Q|^{-\frac{\alpha}{n}} |S_Q| \tilde{\chi}_Q(x) \right)^q \right]^{1/q} \right\|_p \leqslant C \|f\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}},$$

其中 $\tilde{\chi}_Q(x) = |Q|^{-\frac{1}{2}} \chi_Q(x)$，$\chi_Q(x)$ 是 Q 的特征函数，常数 C 与 f 无关。

证明 由 §9.1，存在 θ 与 φ 如定理1.3所述，使得

$$f(x) = \sum_{\nu \in Z} \sum_{l(Q)=2^{-\nu}} \int_Q \theta_\nu(x-y)\varphi_\nu * f(y)\mathrm{d}y.$$

令

$$S_Q = |Q|^{1/2} \sup_{y \in Q} |\varphi_\nu * f(y)|,$$

以及

$$a_Q(x) = \frac{1}{S_Q} \int_Q \theta_\nu(x-y)\varphi_\nu * f(y)\mathrm{d}y.$$

容易验证，a_Q是光滑原子．而

$$\sum_{l(Q)=2^{-\nu}} |Q|^{-\alpha/n} |S_Q| \tilde{\chi}_Q(x) = \sum_{l(Q)=2^{-\nu}} 2^{\nu\alpha} \sup_{y \in Q} |\varphi_\nu * f(y)| \chi_Q(x)$$

$$\leqslant 2^{\nu\alpha} \sup_{|y| \leqslant \sqrt{n}2^{-\nu}} \frac{|\varphi_\nu * f(x-y)|}{(1+2^\nu|y|)^\lambda} (1+2^\nu|y|)^\lambda$$

$$\leqslant C_{\lambda,n} 2^{\nu\alpha} \varphi_\nu^{**}(f)(x).$$

由于 $\lambda > n/\min(p,q)$，用定理2.2，便得到

$$\left\|\left[\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\chi_Q\right)^q\right]^{1/q}\right\|_p$$

$$\leqslant C_{n,\lambda}\left\|\left[\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}\varphi_\nu^{**}(f)(x))^q\right]^{1/q}\right\|_p$$

$$\leqslant C\|f\|_{\dot F_p^{\alpha,q}}.$$

下面考虑定理2.3的逆，如同§9.1，我们需要引入分子的概念。

定义2.4 设$-\infty<\alpha<\infty$，$0<p<\infty$，$0<q\leqslant\infty$，J,L如定义2.3。对$\varepsilon>0$以及$\alpha-[\alpha]<\delta\leqslant 1$，记$\beta=[\alpha]+\delta$，$M=J+\varepsilon$。我们称$m_Q$是一个$(\beta,\varepsilon)$光滑分子，如果

(1) $\int_{R^n}x^\gamma m_Q(x)\mathrm{d}x=0$，只要$0\leqslant|\gamma|\leqslant L$；

(2) $|m_Q(x)|\leqslant|Q|^{1/2}(1+l(Q)^{-1}|x-x_Q|)^{-\max(M,M-\alpha)}$；

(3) $|\partial^\gamma m_Q(x)|\leqslant|Q|^{-1/2-|\gamma|/n}(1+l(Q)^{-1}|x-x_Q|)^{-M-|\gamma|}$，只要$0\leqslant|\gamma|\leqslant[\alpha]$；

(4)

$$|\partial^\gamma m_Q(x)-\partial^\gamma m_Q(y)|\leqslant|Q|^{-\frac{1}{2}-\frac{|\gamma|}{n}-\frac{\delta}{n}}|x-y|^\delta \times\sup_{|z|\leqslant|x-y|}(1+l(Q)^{-1}|x-z-x_Q|)^{-M},$$

其中$|\gamma|=[\alpha]$。

引理2.6 设$-\infty<\alpha<\infty$，$0<q\leqslant\infty$，$0<p<\infty$，$\alpha-[\alpha]<\delta\leqslant 1$，$\varepsilon>0$，$\beta=[\alpha]+\delta$，$M=J+\varepsilon$。若$m_Q$是一个$(\beta,\varepsilon)$光滑分子，则

当$\mu\geqslant\nu$时，

$$|\varphi_\nu * m_Q(x)|\leqslant C|Q|^{-1/2}2^{-(\mu-\nu)\sigma}(1+2^\nu|x-x_Q|)^{-M} \tag{2.6}$$

对某个$\sigma>J-\alpha$成立；

当$\mu\leqslant\nu$时，

$$|\varphi_\nu * m_Q(x)|\leqslant C|Q|^{-1/2}2^{-(\nu-\mu)\tau}(1+2^\mu|x-x_Q|)^{-M} \tag{2.7}$$

对某个 $\tau>\alpha$ 成立。

为简化引理2.6的证明，我们先证明以下两条引理。

引理2.7 设 $R>n$，$0<\theta<1$，$k,j\in\boldsymbol{Z}$，$k\geqslant j, L\in\boldsymbol{Z}$，$L\geqslant 0$，$s>L+n+\theta$，$x_0\in\boldsymbol{R}^n$。若 $g,h\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 满足以下条件：

$$|\partial^\gamma g(x)|\leqslant 2^{j(n/2+|\gamma|)}(1+2^j|x|)^{-R},\qquad 当|\gamma|\leqslant L;$$

$$|\partial^\gamma g(x)-\partial^\gamma g(y)|$$
$$\leqslant 2^{j(n/2+L+\theta)}|x-y|^\theta\sup_{|z|\leqslant|y-x|}(1+2^j|z-x|)^{-R}, 当|\gamma|=L; \tag{2.8}$$

(2.9)

$$|h(x)|\leqslant 2^{kn/2}(1+2^k|x-x_0|)^{-\max(R,s)}, \tag{2.10}$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}x^\gamma h(x)\mathrm{d}x=0,\qquad |\gamma|\leqslant L, \tag{2.11}$$

则有

$$|g*h(x)|\leqslant C2^{-(k-j)(L+\theta+n/2)}(1+2^j|x-x_0|)^{-R}, \tag{2.12}$$

其中 C 与 g,h,k,j,x,x_0 无关。

证明 通过平移，可以假定 $x_0=0$。通过展缩变换，可以假定 $j=0$。

令

$$A=\{y:\ |y-x|\leqslant 3\},$$
$$B=\{y:\ |y-x|>3 且 |y|\leqslant|x|/2\},$$
$$C_1=\{y:\ |y-x|>3, 且 |y|>|x|/2\}.$$

由 (2.10)与 (2.11)，有

$$|g*h(x)|=\left|\int_{R^n}\left[g(y)-\sum_{|\beta|\leqslant L}\partial^\beta g(x)(y-x)^\beta/\beta!\right]h(x-y)\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant\left(\int_A+\int_B+\int_{C_1}\right)\left|g(y)-\sum_{|\beta|\leqslant L}\frac{\partial^\beta g(x)(y-x)^\beta}{\beta!}\right|$$
$$\times 2^{k\frac{n}{2}}(1+2^k|x-y|)^{-\max(R,s)}\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

根据(2.9)，当 $y\in A$ 时，

$$\left|g(y)-\sum_{|\beta|\leqslant L}\frac{\partial^\beta g(x)(y-x)^\beta}{\beta!}\right|$$

$$=\left|\sum_{|\beta|=L}(\partial^\beta g(z)-\partial^\beta g(x))\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\right|$$

$$\leqslant C|x-y|^{L+\theta}\sup_{|z|\leqslant 3}(1+|z-x|)^{-R}$$

$$\leqslant C|x-y|^{L+\theta}(1+|x|)^{-R},$$

其中 z 是位于 x,y 之间的某点，因此 $|z|\leqslant 3$，从而 $1+|z-x|\geqslant\frac{1}{8}(1+|x|)$。故

$$\mathrm{I}\leqslant C2^{kn/2}(1+|x|)^{-R}\int_A|x-y|^{L+\theta}(1+2^k|x-y|)^{-s}dy$$

$$\leqslant C2^{kn/2}(1+|x|)^{-R}\int_0^3\frac{r^{L+\theta+n-1}}{(1+2^kr)^s}dr$$

$$\leqslant C2^{-k(L+\theta+n/2)}(1+|x|)^{-R}\int_0^{3\cdot 2^k}\frac{r^{L+\theta+n-1}}{(1+r)^s}dr$$

$$\leqslant C2^{-k(L+\theta+n/2)}(1+|x|)^{-R}.$$

当 $y\in B$ 时，$\frac{|x|}{2}\leqslant|y-x|\leqslant 3\frac{|x|}{2}$，因此 $2^k|x-y|\geqslant\frac{2^k}{4}\times(1+|x|)$。故

$$\mathrm{II}\leqslant C\int_B\left[\frac{1}{(1+|y|)^R}+\sum_{|\beta|\leqslant L}\frac{|x-y|^{|\beta|}}{(1+|x|)^R}\right]$$

$$\times 2^{kn/2}2^{-ks}(1+|x|)^{-\max(R,s)}dy$$

$$\leqslant C2^{-k(s-\frac{n}{2})}(1+|x|)^{-R}$$

$$\times\left[\int\frac{\mathrm{d}y}{(1+|x|)^R}+\frac{|x|^L}{(1+|x|)^s}\int_{|y|<\frac{|x|}{2}}\mathrm{d}y\right]$$

$$\leqslant C2^{-k(s-\frac{n}{2})}(1+|x|)^{-R}.$$

对 $y\in C_1$，$1+|y|\geqslant\frac{1}{2}(1+|x|)$，因此

$$\text{III}\leqslant C\int_{C_1}\left[\frac{1}{(1+|y|)^R}+\sum_{|\beta|=L}\frac{|y-x|^{|\beta|}}{(1+|x|)^R}\right]$$

$$\times 2^{kn/2}(1+2^k|x-y|)^{-s}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C2^{kn/2}(1+|x|)^{-R}\int_{C_1}|y-x|^L(1+2^k|x-y|)^{-s}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C2^{kn/2}(1+|x|)^{-R}\int_3^{\infty}\frac{r^{L+n-1}}{(2^kr)^s}\mathrm{d}r$$

$$\leqslant C2^{-k(s-n/2)}(1+|x|)^{-R}.$$

这样就证明了引理2.7。

对于 $L=-1$，即 h 没有消失矩条件，g 没有光滑性条件，也有类似的结果成立且证明要简单些。我们写成下面的引理。

引理2.8 设 $R>n$，$k,j\in\boldsymbol{Z}$，$k\geqslant j$，$x_0\in\boldsymbol{R}^n$。若 $g,h\in L^1$且满足

$$|g(x)|\leqslant 2^{jn/2}(1+2^j|x|)^{-R}, \tag{2.13}$$

$$|h(x)|\leqslant 2^{kn/2}(1+2^k|x-x_0|)^{-R}, \tag{2.14}$$

则

$$|g*h(x)|\leqslant C2^{-n(k-j)/2}(1+2^j|x-x_0|)^{-R}.$$

证明 类似于引理2.7的证明，不妨设 $x_0=0$，$j=0$。而 A，B，C_1的意义也与引理2.7的证明相同。

当 $y\in A\cup C_1$时，$1+|y|\geqslant\frac{1}{8}(1+|x|)$，因此

$$\int_{A\cup C_1}|g(y)||h(x-y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C(1+|x|)^{-R}2^{kn/2}\int_{R^n}(1+2^k|x-y|)^{-R}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C2^{-kn/2}(1+|x|)^{-R}.$$

当 $y\in B$ 时，$2^k|x-y|\geqslant\frac{1}{4}2^k(1+|x|)$，因此

$$\int_B|g(y)||h(x-y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C2^{-kR}2^{kn/2}(1+|x|)^{-R}\int_{R^n}(1+|y|)^{-R}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C2^{-kn/2}(1+|x|)^{-R}.$$

引理2.6 的证明 考虑 $\mu\geqslant\nu$ 的情形。如果 $\alpha\leqslant J-n$，令 $L=[J-n-\alpha]\geqslant 0$，$R=M$，$0<\theta<\varepsilon$，$k=\mu, j=\nu, s=M-\alpha$，$x_0=x_Q$，$g=2^{-\nu n/2}\varphi_\nu$，$h=m_Q$，那么从引理2.7 便推出（2.6），其中 $\sigma=L+1+n>J-n-\alpha+n=J-\alpha$。如果 $\alpha>J-n$，令 $R=M$，$k=\mu$，$j=\nu$，$x_0=x_Q$，$h=2^{-\nu n/2}$，$g=m_Q$，那么引理2.7也推出（2.6），其中 $\sigma=n>J-\alpha$。

考虑 $\mu\leqslant\nu$。如果 $\alpha\geqslant 0$，令 $L=[\alpha]$，$R=M$，$\theta=\delta$，$k=\nu$，$j=\mu$，s 是充分大的数，$s>[\alpha]+n+\delta$，$x_0=x_Q$，$h=2^{-\nu n/2}\varphi_\nu$，$g=m_Q$，那么从引理2.7便推出（2.7），其中 $\tau=[\alpha]+\delta>\alpha$。如果 $\alpha<0$，对同样的 R,k,j,x_0,h 与 g，从引理2.8 也推出（2.7），其中 $\tau=0>\alpha$。引理2.6证完。

引理2.9 设 $\eta,\mu\in\mathbf{Z},\eta<\mu$，$0<A\leqslant 1$ 且 $\lambda>n/A$。则对任何序列 $\{S_Q\}$，有

$$\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|/(1+2^\eta|x-x_Q|)^\lambda$$

$$\leqslant C2^{(\mu-\eta)n/A}\Big(M\Big(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^A\chi_Q\Big)\Big)^{1/A}(x),$$

其中 C 仅依赖于 n,A 与 $\lambda-n/A$。

证明 设 S 是二进方体，$l(S)=2^{-\mu}$，$x\in S$。记

$A_0=\{Q\mid$ 二进方体，$l(Q)=2^{-\mu}$，$|x_Q-x_S|\leqslant 2^{-\eta}\}$，

$A_k=\{Q\mid$ 二进方体，$l(Q)=2^{-\mu}$，$2^{k-\eta-1}<|x_Q-x_S|\leqslant 2^{k-\eta}\}$，

其中 $k=1,2,3,\cdots$。这时，对任意 $Q\in A_k$，有

$$1+2^{\eta}|x-x_Q|\sim 1+2^{\eta}|x_Q-x_S|\sim 2^k.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in A_k}\frac{|S_Q|}{(1+2^{\eta}|x-x_Q|)^{\lambda}}&\leqslant C2^{-k\lambda}\sum_{Q\in A_k}|S_Q|\\&\leqslant C2^{-k\lambda}\Big(\sum_{Q\in A_k}|S_Q|^A\Big)^{1/A}\\&\leqslant C2^{-k\lambda+\mu n/A}\Big(\int_{R^n}\sum_{Q\in A_k}|S_Q|^A\chi_Q(x)\mathrm{d}x\Big)^{1/A}.\end{aligned}$$

最后一个积分区域，包含在 $\bigcup_{Q\in A_k}Q\subset\{x:\ |x-x_S|\leqslant C2^{k-\eta}\}$，因此

$$\int_{R^n}\sum_{Q\in A_k}|S_Q|^A\chi_Q(x)\mathrm{d}x\leqslant C2^{(k-\eta)n}M\Big(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^A\chi_Q\Big)(x).$$

由于 $\lambda>n/A$，故

$$\begin{aligned}&\sum_{Q\in A_k}|S_Q|/(1+2^{\eta}|x-x_Q|)^{\lambda}\\&\qquad\leqslant C2^{-k(\lambda-n/A)}2^{(\mu-\eta)n/A}\Big(M\Big(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^A\chi_Q\Big)\Big)^{1/A}(x).\end{aligned}$$

对 k 求和，便得所要求的结果。证毕。

引理2.10 设 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，$0<q\leqslant\infty$，$0<p<\infty$，$\alpha-[\alpha]<\delta\leqslant 1$，$\varepsilon>0$，$\beta=[\alpha]+\delta$，$0<A\leqslant 1$，$M=J+\varepsilon>n/A$，$m_Q$ 是 (β,ε) 光滑分子，则

当 $\mu\geqslant\nu$ 时，有

$$\left|\varphi_\nu * \sum_{l(Q)=2^{-\mu}} S_Q m_Q(x)\right|$$

$$\leqslant C|Q|^{-1/2}2^{-(\mu-\nu)(\sigma-n/A)}\left(M\left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^A\chi_Q\right)\right)^{1/A}(x); \tag{2.15}$$

当 $\mu\leqslant\nu$ 时，有

$$\left|\varphi_\nu * \sum_{l(Q)=2^{-\mu}} S_Q m_Q(x)\right|$$

$$\leqslant C|Q|^{-1/2}2^{-(\nu-\mu)\tau}\left(M\left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^A\chi_Q\right)\right)^{1/A}(x), \tag{2.16}$$

其中 $\sigma>J-\alpha$，$\tau>\alpha$。

证明 由（2.6）与引理 2.9 在 $\lambda=M$ 以及 $\eta=\nu$ 时可证得(2.15)，由(2.7)与引理2.9在 $\lambda=M$ 以及 $\eta=\mu$ 时可证得(2.16)。证毕。

定理2.4 设 $-\infty<\alpha<\infty$，$0<q\leqslant\infty$，$0<p<\infty$，$\alpha-[\alpha]<\delta\leqslant 1$，$\beta=[\alpha]+\delta$，$\varepsilon>0$，$m_Q$是（$\beta,\varepsilon$）光滑分子，则对任意序列 $\{S_Q\}$，Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 二进方体，有

$$\left\|\sum_Q S_Q m_Q\right\|_{\dot F_p^{\alpha,q}}\leqslant C\left\|\left[\sum_\nu\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\chi_Q\right)^q\right]^{1/q}\right\|_p,$$

其中 C 是与$\{S_Q\}$无关的常数。

特别地，如果 a_Q是光滑原子，那末

$$\left\|\sum S_Q a_Q\right\|_{\dot F_p^{\alpha,q}}\leqslant C\left\|\left(\sum_\nu\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}|Q|^{-\frac{\alpha}{n}}|S_Q|\chi_Q\right)^q\right)^{1/q}\right\|_p.$$

这定理与定理2.3合起来，给出了 Triebel-Lizorkin 空间的原子刻画。

证明 取 A 满足 $0<A<\min(1,p,q)$，并且使得

$$J=\frac{n}{\min(1,p,q)}<\frac{n}{A}<\min(J+\varepsilon,\ \sigma+\alpha),$$

其中 $\sigma>J-\alpha$ 是由引理2.6决定的。这时

$$\left(\sum_{\nu\in Z}\left(2^{\nu\alpha}\left|\varphi_\nu*\sum_Q S_Q m_Q\right|\right)^q\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\left(\sum_{\nu\in Z}\left(2^{\nu\alpha}\left|\sum_{\mu=-\infty}^{\nu}\varphi_\nu*\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}S_Q m_Q\right|\right)^q\right)^{1/q}$$

$$+\left(\sum_{\nu\in Z}\left(2^{\nu\alpha}\left|\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\varphi_\nu*\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}S_Q m_Q\right|\right)^q\right)^{1/q}$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

由（2.16），对某个 $\tau>\alpha$，有

$$\mathrm{I}\leqslant C\left[\sum_{\nu\in Z}\left(2^{\nu\alpha}\sum_{\mu=-\infty}^{\nu}|Q|^{-1/2}2^{-(\nu-\mu)\tau}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times M\left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^A\chi_Q\right)^{1/A}(x)\right)^q\right]^{1/q}$$

$$=C\left[\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{\mu=-\infty}^{\nu}2^{-(\nu-\mu)(\tau-\alpha)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(M\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{1/A}\right)^q\right]^{1/q}.$$

令

$$a_\mu=2^{-\mu(\tau-\alpha)}\chi_{\{\mu\geqslant 0\}},$$

$$b_\mu=\left[M\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right]^{1/A}.$$

当 $1\leqslant q\leqslant\infty$ 时，

$$\mathrm{I}\leqslant C\left[\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{\mu\in Z}a_{\nu-\mu}b_\mu\right)^q\right]^{1/q}=C\|a*b\|_{l^q}$$

$$\leqslant C\|a\|_{l^1}\|b\|_{l^q}\leqslant C\|b\|_{l^q}$$

$$\leqslant C\left[\sum_{\nu\in Z}\left(M\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{q/A}\right]^{1/q}.$$

当$0<q\leqslant 1$时，令$\tilde{a}_\mu=a_\mu^q$，$\tilde{b}_\mu=b_\mu^q$，则由q-三角不等式，有

$$\mathrm{I}\leqslant\left(\sum_{\nu\in Z}\sum_{\mu\in Z}\tilde{a}_{\nu-\mu}\tilde{b}_\mu\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\|\tilde{a}*\tilde{b}\|_{l^1}^{1/q}\leqslant C\|\tilde{a}\|_{l^1}^{1/q}\|\tilde{b}\|_{l^1}^{1/q}$$

$$\leqslant C\left[\sum_{\nu\in Z}\left(M\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{q/A}\right]^{1/q}.$$

类似地，由（2.15）得到

$$\mathrm{II}\leqslant C\left[\sum_{\nu\in Z}\left(2^{\nu\alpha}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}|Q|^{-1/2}2^{-(\mu-\nu)(\sigma-n/A)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(M\left(\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}|S_Q|^A\chi_Q\right)(x)\right)^{1/A}\right)^q\right]^{1/q}$$

$$=C\left[\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}2^{-(\mu-\nu)(\sigma-n/A+\alpha)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(M\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}(|Q|^{-\frac{\alpha}{n}}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{1/A}\right)^q\right]^{1/q}.$$

令

$$a_\mu=2^{\mu\left(\sigma-\frac{n}{A}+\alpha\right)}\chi_{\{\mu<0\}}$$

以及

$$b_\mu=\left(M\sum_{l(Q)=2^{-\mu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{1/A}.$$

由于$\sigma>\dfrac{n}{A}-\alpha$，我们有$\{a_\mu\}\in l^1(\boldsymbol{Z})$以及$a_\mu^q\in l^1(\boldsymbol{Z})$。与前面估计一样，对II可得到类似于I的估计．故

$$\left\|\sum_Q S_Q m_Q\right\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}}$$

$$\leqslant C\left\|\left[\sum_{\nu\in Z}\left(M\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{q/A}\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_p$$

$$=C\left\|\sum_{\nu\in Z}\left(M\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{q/A}\right]^{A/q}\right\|_{L^{p/A}}^{\frac{1}{A}}$$

注意到 $A = \min(1,p,q)$，有 $\frac{p}{A}>1$，$\frac{q}{A}>1$。应用向量值极大函数不等式（2.1），便得

$$\left\|\sum_Q S_Q m_Q\right\|_{\dot F_p^{\alpha,q}}$$

$$\leqslant C\left\|\left[\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^A(x)\right)^{q/A}\right]^{1/q}\right\|_p,$$

再由边长为$2^{-\nu}$的二进方体互不相交，知

$$\left\|\sum_Q S_Q m_Q\right\|_{\dot F_p^{\alpha,q}}\leqslant C\left\|\left[\sum_{\nu\in Z}\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^q\right)\right]^{1/q}\right\|_p$$

$$=C\left\|\left[\sum_Q(|Q|^{-\alpha/n}|S_Q|\tilde{\chi}_Q)^q\right]^{1/q}\right\|_p.$$

定理2.4证毕。

§9.3 BMO 函数的分解

BMO 空间在 L^∞ 与 $B_\infty^{0,\infty}$ 之间，可以看成临界的 Besov 空间，它也有类似于上两节的“原子”分解。作为这种分解的应用，可以推广 §7.1中 C.Fefferman-Stein 的定理1.5，同时也给出了这定理的一个构造性的证明。

§7.1中 C.Fefferman-Stein 的定理1.5断言，$f\in \mathrm{BMO}$，当且仅当存在 $g_0,g_1,\cdots,g_n\in L^\infty$，使得

$$f=g_0+\sum_{j=1}^n R_j(g_j),$$

其中 R_j是 Riesz 变换。一个自然的问题是，对于怎样的 L^2有界的算子族$\{K_j\}_{j=1}^m$，它们可以在上述命题中代替 Riesz 变换$\{R_j\}$？如果这些算子是卷积型算子，这个问题本质上也等价于，对于怎样的 L^2有界的算子族$\{K_j\}_{j=1}^m$，它们可以刻画 H^1，即使得

$$H^1=\{f\in L^1:\ K_j(f)\in L^1,\ j=1,\cdots,m\}?$$

本节要证明的下面的定理，回答了这个问题。

定理3.1(Janson-Uchiyama) 设 $\theta_1(\xi),\cdots,\theta_m(\xi)\in C^\infty(S_{n-1})$，其中 S_{n-1}是 $\boldsymbol{R}^n$的单位球面。令

$$K_j(f)(x)=\left(\theta_j\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\hat{f}(\xi)\right)^\vee(x),\quad j=1,2,\cdots,m. \tag{3.1}$$

若对任意$f\in$BMO，存在$g_1,\cdots,g_m\in L^\infty$，使得

$$f=\sum_{j=1}^m K_j(g_j),$$

且满足

$$\sum_{j=1}^m\|g_j\|_\infty\leqslant C(\theta_1,\cdots,\theta_m)\|f\|_*,$$

则对于任意 $\xi\in S_{n-1}$，有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\theta_1(\xi) & \cdots & \theta_m(\xi)\\ \theta_1(-\xi) & \cdots & \theta_m(-\xi)\end{pmatrix}=2. \tag{3.2}$$

反之，若定义算子族 K_j 的 θ_j，满足(3.2)，则对任意 $f\in$ BMO，f 具有紧支集，存在 $g_1,\cdots,g_m\in L^\infty$，使得

$$f=\sum_{j=1}^m K_j(g_j),$$

并且

$$\|f\|_*\leqslant C(\theta_1,\cdots,\theta_m)\sum_{j=1}^m\|g_j\|_\infty.$$

先证明定理的第二部分，即所谓的BMO函数分解，再证明定理的第一部分。第二部分的证明是构造性的。我们把它分成若干步。

第一步 主要引理及用主要引理来证明定理的第二部分。

主要引理3.1 设(3.2)成立，$\|f\|_*\leqslant 1$，且 f 具有紧支集，则只要R充分大，就存在 $g_1,\cdots,g_m\in L^\infty$，满足

$$\left\| f-\sum_{j=1}^{m}K_j(g_j)\right\|_*\leqslant\frac{1}{5}; \tag{3.3}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|g_j(x)|^2\right)^{1/2}\equiv R; \tag{3.4}$$

$$\text{supp}\ g_1-R,\ \text{supp}\ g_2,\cdots,\ \text{supp}\ g_m \text{ 是紧集.} \tag{3.5}$$

引理的证明放到后面，现在用引理来证明定理的第二部分。

定理3.1第二部分的证明 记引理中的g_j为g_j^1。根据K_j的性质(参看下面的引理3.2)，容易证明

$$\lim_{x\to\infty}K_1(g_1-R)(x)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}K_j(g_j)(x)=0,\quad j=2,3,\cdots,m.$$

因此$\lim\limits_{x\to\infty}K_j(g_j)(x)$存在。故存在$f_1\in\text{BMO}$，具有紧支集，使得

$$\left\| f-\sum_{j=1}^{m}K_j(g_j)-f_1\right\|_*\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}.$$

由此推出$\|f_1\|_*<\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$。应用主要引理到$4f_1$，使得$g_j^2$，满足

$$\left\| f_1-\sum_{j=1}^{m}K_j(g_j^2)\right\|_*\leqslant\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|g_j^2(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}=R/4,$$

$\text{supp}(g_1^2-R)$，$\text{supp}\ g_j$ 是紧集，$j=2,\cdots,m$。这样

$$\left\| f-\sum_{j=1}^{m}K_j(g_j^1+g_j^2)\right\|_*\leqslant\frac{1}{10}.$$

重复这个推理，便得$f=\sum\limits_{j=1}^{m}K_j\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_j^i\right)$(模去常数)，而

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|g_j^1\|_\infty\leqslant R+\frac{R}{4}+\frac{R}{8}+\cdots=\frac{3R}{2},$$

这就是定理3.1第二部分所要求的。

主要引理的证明，再分成下面的几步。

第二步　证明算子 $K=(K_1,\cdots,K_m)$存在某种意义下的逆算子.

引理3.2　设$\theta(\xi)\in C^\infty(S_{n-1})$是零次齐次，则存在常数$a_\theta$与零次齐次函数$\Omega_\theta(x)\in C^\infty(S_{n-1})$，满足

$$\int_{S_{n-1}}\Omega_\theta(x)\mathrm{d}\sigma_x=0,$$

$$\sup_{x\in S_{n-1}}|D_{x_j}D_{x_k}\Omega_\theta(x)|\leqslant C_\theta,$$

$$|a_\theta|\leqslant C_\theta$$

以及

$$(\theta(\xi)\hat{f}(\xi))^\vee(x)=a_\theta f(x)+\mathrm{p.v.}\int_{R^n}\frac{\Omega_\theta(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y$$

对所有$f\in L^2$成立，其中C_θ只依赖于θ。

本引理的证明见[St4第75页，中译本第94页]。

如果$\theta(\xi)+\theta(-\xi)\equiv0$，则 $\mathrm{Re}\,a_\theta=0$，$\mathrm{Re}\,\Omega_\theta(x)=0$。

引理3.3　设$\nu\in\Sigma_{2m-1}$，即$\boldsymbol{C}^m$的单位球面，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$，$\mu'=(\mu'_1,\cdots,\mu'_m)\in\boldsymbol{C}^m$，

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\mu_1 & \cdots & \mu_m\\ \mu'_1 & \cdots & \mu'_m\end{pmatrix}=2,\tag{3.6}$$

则存在$k_1,\cdots,k_m$与$k'_1,\cdots,k'_m\in\boldsymbol{C}$，使得

$$\sum_{j=1}^m\mu_jk_j=\sum_{j=1}^m\mu'_jk'_j=1,$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^m\bar{\nu}_j(k_j+k'_j)=\mathrm{Im}\sum_{j=1}^m\bar{\nu}_j(k_j-k'_j)=0.$$

证明 令

$$A=\begin{pmatrix} \nu & \nu \\ -i\nu & i\nu \\ \mu & 0 \\ i\bar{\mu} & 0 \\ 0 & \bar{\mu}' \\ 0 & i\bar{\mu}' \end{pmatrix}=(A_1,A_2),$$

其中ν,μ,μ',0都是m维行向量，A_1与A_2是$6\times m$阶矩阵。

我们证明rank $A=6$。实际上，由(3.6)知

$$\max\left(\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\nu\\ \bar{\mu}\end{pmatrix},\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\nu\\ \bar{\mu}'\end{pmatrix}\right)=2.$$

不妨设$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\nu\\ \bar{\mu}\end{pmatrix}=2$，则显然有rank $A_1=4$。若存在$a_1,\cdots,a_6$，使得

$$(a_1,a_2,\cdots,a_6)A=(0,0,\cdots,0),$$

则$a_1=a_2=a_3=a_4=0$，$a_5\bar{\mu}'+a_6 i\bar{\mu}'=0$，而$\bar{\mu}'$与$i\bar{\mu}'$是线性无关的，故$a_5=a_6=0$。这就证明了rank $A=6$。于是存在$x_1,\cdots,x_{2m}$，$x'_1,\cdots,x'_{2m}\in\boldsymbol{R}$，使得

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2m}\\ x'_1\\ \vdots\\ x'_{2m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

令

$$k=x_1+ix_2,\cdots,k_m=x_{2m-1}+ix_{2m},$$
$$k'_1=x'_1+ix'_2,\cdots,k'_m=x'_{2m-1}+ix'_{2m},$$

则它们满足引理的要求。证毕。

引理3.4 设(3.2)成立，则存在

$$\Theta_1(\xi,\nu),\cdots,\Theta_m(\xi,\nu)\in C^\infty(S_{n-1}\times\Sigma_{2m-1}),$$

满足

$$\sum_{j=1}^m \theta_j(\xi)\Theta_j(\xi,\nu)\equiv 1,$$

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^m \bar{\nu}_j(\Theta_j(\xi,\nu)+\Theta_j(-\xi,\nu))$$

$$=\operatorname{Im}\sum_{j=1}^m \bar{\nu}_j(\Theta_j(\xi,\nu)+\Theta_j(-\xi,\nu))\equiv 0,$$

$$\sup\{|D_\xi^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}\Theta_j(\xi,\nu)|:\ |\xi|=|\nu|=1,\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant C(n)\}$$
$$\leqslant C(\theta_1,\cdots,\theta_m).$$

证明 任取$(\xi,\nu)\in S_{n-1}\times\Sigma_{2m-1}$，由(3.2)与引理 3.3，知存在$\{K_j(\xi,\nu)\}_{j=1}^m$以及$\{K'_j(\xi,\nu)\}_{j=1}^m$，使得

$$\sum_{j=1}^m \theta_j(\xi)K_j(\xi,\nu)=\sum_{j=1}^m\theta_j(-\xi)K'_j(\xi,\nu)=1$$

以及

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^m \bar{\nu}_j(K_j(\xi,\nu)+K'_j(\xi,\nu))$$

$$=\operatorname{Im}\sum_{j=1}^m \bar{\nu}_j(K_j(\xi,\nu)-K'_j(\xi,\nu))=0.$$

实际上，由引理3.3的证明可知，对任意固定的(ξ,ν)，存在(ξ,ν)的一个邻域，使得$K_j(\xi,\nu)$与$K'_j(\xi,\nu)\in C^\infty$。再由$S_{n-1}\times\Sigma_{2m-1}$的紧性，知可以定义$K_j(\xi,\nu)$与$K'_j(\xi,\nu)\in C^\infty(S_{n-1}\times\Sigma_{2m-1})$。剩下只要令

$$\Theta_j(\xi,\nu)=\frac{1}{2}[K_j(\xi,\nu)+K'_j(-\xi,\nu)],$$

便证得引理3.4。

引理3.5 设$f\in L^2$，则存在$p(x)=(p_1(x),\cdots,p_m(x))$，满足

$$p(x)\cdot\nu\equiv 0,$$

$$(K\cdot p)(x)=f(x),$$

其中

$$(K\cdot p)(x)=\sum_{j=1}^{m}K_jp_j(x)=\sum_{j=1}^{m}K_j(p_j)(x).$$

证明 令

$$p_j(x)=(\Theta_j(\xi,\nu)\widehat{\mathrm{Re}f}(\xi))^\vee(x)+\mathrm{i}(\Theta_j(\xi,\mathrm{i}\nu)\widehat{\mathrm{Im}f}(\xi))^\vee(x),$$
$$j=1,2,\cdots,m.$$

对 $\Theta_j(\xi,\nu)$ 应用引理3.2，存在

$a_{\Theta_j(\cdot,\nu)}$ 与 $\Omega_{\Theta_j(\cdot,\nu)}\in C^\infty(S_{n-1})$，满足

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{\nu}_jp_j(x)=\sum_{j=1}^{m}\bar{\nu}_ja_{\Theta_j(\cdot,\nu)}\mathrm{Re}\,f(x)$$
$$+\mathrm{p.v.}\int_{R^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\bar{\nu}_j\Omega_{\Theta(\cdot,\nu)}(x-y)}{|x-y|^n}\mathrm{Re}\,f(y)\mathrm{d}y$$
$$+\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m}\bar{\nu}_ja_{\Theta_j(\cdot,\mathrm{i}\nu)}\mathrm{Im}f(x)$$
$$+\mathrm{p.v}\int_{R^n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\nu_j\Omega_{\Theta(\cdot,\nu)}(x-y)}{|x-y|^n}\mathrm{Im}f(y)\mathrm{d}y$$

由引理3.4及引理3.2后的说明，有

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m}\bar{\nu}_ja_{\Theta_j(\cdot,\nu)}=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m}\bar{\nu}_j\,\Omega_{\Theta_j(\cdot,\nu)}(x)=0,$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{i}\,\bar{\nu}_ja_{\Theta_j(\cdot,\mathrm{i}\nu)}=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{i}\,\bar{\nu}_j\Omega_{\Theta_j(\cdot,\mathrm{i}\nu)}(x)=0.$$

再由引理3.4便知引理3.5的结论成立。

引理 3.5 说明，若(3.2)成立，则 $K=(K_1,\cdots,K_m)$ 存在某种意义下的逆算子。结论 $p(x)\cdot\nu=0$ 对以后的证明起着关键的作用。

第三步 BMO的“光滑原子”分解与“分子”分解。

引理3.6 设 $\|f\|_*\leqslant C$ 且 f 有紧支集，其中 C 是某个正数，则

$f=\sum_{Q}\lambda_Q b_Q(x)$，其中 Q 取遍全体二进方体，且

$$\operatorname{supp} b_Q \subset 3Q,$$

$$\int_{R^n} b_Q(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\|b_Q\|_{\mathrm{Lip}\,1}\leqslant l(Q)^{-1},$$

$$\left\|\sum_{Q}|\lambda_Q|^2|Q|\delta_{(x_Q,\ l(Q))}\right\|_C\leqslant 1,$$

其中

$$\|b\|_{\mathrm{Lip}\,1}=\sup_{x\neq y}\frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|},$$

$\delta_{(x,\ t)}$ 表示 R_+^{n+1} 上在 (x,t) 的Dirac测度，$\|\cdot\|_C$ 表示 Carleson 测度范数。

证明　记

$$\hat{Q}=\left\{(x,t):\ x\in Q,\ \frac{l(Q)}{2}\leqslant t<l(Q)\right\},$$

$$T(Q)=\{(x,t):\ x\in Q,\ 0<t<l(Q)\}.$$

用 Calderón 表示定理，有

$$f(x)=\int_0^\infty \psi_t*\psi_t*f(x)\frac{\mathrm{d}t}{t}=\sum_{Q}\tilde{b}_Q(x),$$

其中

$$\tilde{b}_Q(x)=\iint_{\hat{Q}}\psi_t(x-y)(\psi_t*f)(y)\ \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}.$$

显然 $\tilde{b}_Q$ 满足支集条件与消失矩条件。而

$$|\mathrm{D}_{x_j}\tilde{b}_Q(x)|=\left|\iint_{\hat{Q}}\mathrm{D}_{x_j}\psi_t(x-y)(\psi_t*f)(y)\ \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right|$$

$$\leqslant\lambda_Q l(Q)^{-1},$$

其中

$$\lambda_Q = C|Q|^{-1/2}\left(\iint_{\hat{Q}} |\psi_t * f(y)|^2 \frac{dydt}{t}\right)^{1/2}.$$

再令$b_Q(x)=\tilde{b}_Q(x)/\lambda_Q$，剩下只要验证关于Carleson范数的要求即可. 为此，任取二进方体J，则

$$\sum |\lambda_Q|^2|Q|\delta_{(x_Q,\ l(Q))}(T(J)) = \sum_{Q\subset J}|\lambda_Q|^2|Q|$$

$$= C\sum_{Q\subset J}\iint_{\hat{Q}}|\psi_t * f(y)|^2\frac{dydt}{t}$$

$$= C\iint_{T(J)}|\psi_t * f(y)|^2\frac{dydt}{t}$$

$$\leqslant C\|f\|_*^2|J|,$$

最后一个不等式由§7.1中定理1.7得到.

实际上，我们还可以证明$\|b_Q\|_{\text{Lip}\,2}\leqslant l(Q)^{-2}$，其中

$$\|f\|_{\text{Lip}\,2} = \sum_{j=1}^{n}\|D_{x_j}f\|_{\text{Lip}\,1}.$$

引理3.7 设j是正整数. 若$\{b_Q\}$满足

$$\text{supp}\ b_Q\subset 2^jQ,\qquad \int_{R^n} b_Q(x)dx = 0,$$

$$\|b_Q\|_{\text{Lip}\,1}\leqslant (2^j l(Q))^{-1},$$

则对任意复数列$\{\lambda_Q\}$以及$\beta>\alpha>0$，有

$$\left\|\sum_{Q:\ \alpha<l(Q)<\beta}\lambda_Q b_Q\right\|_2 \leqslant C2^{jn}\left(\sum_Q|\lambda_Q|^2|Q|\right)^{1/2}.$$

证明 根据引理的条件，容易看出

$$\left|\int_{R^n} b_Q(x)\overline{b_J(x)}dx\right|\leqslant C2^{jn}|J|\frac{l(J)}{l(Q)}.$$

记

$$\mathscr{B}_k(Q)=\{J:\ \text{二进方体},\ l(J)=2^{-k}l(Q),\ 2^jQ\cap 2^jJ\neq\varnothing\},$$

则

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left|\sum_Q\lambda_Q b_Q(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_Q|\lambda_Q|\sum_{J\in\mathscr{B}_k(Q)}|\lambda_J|\left|\int_{\mathbf{R}^n}b_Q(x)\overline{b_J(x)}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_Q|\lambda_Q|\sum_{J\in\mathscr{B}_k(Q)}|\lambda_J|2^{jn}|J|\frac{l(J)}{l(Q)}$$

$$\leqslant C2^{jn}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k(n+1)}\left(\sum_Q|\lambda_Q|^2|Q|\right)^{1/2}$$

$$\times\left\{\sum_Q\left(\sum_{J\in\mathscr{B}_k(Q)}|\lambda_J|\right)^2|Q|\right\}^{1/2}$$

注意到 $\mathscr{B}_k(Q)$ 中 J 的数目 $\leqslant C2^{(j+k)n}$，故

$$\sum_Q\left(\sum_{J\in\mathscr{B}_k(Q)}|\lambda_J|\right)^2|Q|$$

$$\leqslant\sum_Q\sum_{J\in\mathscr{B}_k(Q)}2^{(j+k)n}|\lambda_J|^2|Q|$$

$$\leqslant 2^{kn}2^{2jn}\sum_Q|\lambda_Q|^2|Q|,$$

代回上式便得引理3.7所要求的结果。证毕。

引理3.8 设 $\{b_Q\}$ 与 $\{\lambda_Q\}$ 满足引理3.7的条件，且

$$\left\|\sum_Q|\lambda_Q|^2|Q|\delta_{(x_Q,\ l(Q))}\right\|_C\leqslant 1,$$

则对任意 $a>0$，

$$f(x)=\sum_{Q:\ l(Q)<a}\lambda_Q b_Q(x)\in\mathrm{BMO},$$

且

$$\|f\|_{*}\leqslant C2^{jn}.$$

证明 对任意方体Q，令

$$f_1(x)=\sum_{\substack{J:\ l(J)<a,\ l(J)<2^{-j}l(Q)\\ 2^jJ\cap Q\neq\phi}}\lambda_J b_J(x),$$

$$f_2(x)=f(x)-f_1(x)。$$

由定理条件知$|\lambda_Q|\leqslant 1$，因此对任意 $x,y\in Q$，有

$$\begin{aligned}&|f_2(x)-f_2(y)|\\&=\left|\sum_{J:\ l(J)<a,\ l(J)\geqslant 2^{-j}l(Q)}\lambda_J[b_J(x)-b_J(y)]\right|\\&\leqslant C_a2^{jn},\end{aligned}$$

而由引理3.7以及本引理的条件，知

$$\|f\|_2^2\leqslant C2^{2jn}\sum_{\substack{J:\ l(J)<2^{-j}l(Q)\\ 2^jJ\cap Q\neq\phi}}|\lambda_J|^2|J|\leqslant C2^{2jn}|Q|.$$

从这些估计推出

$$\int_Q|f(x)-f_2(x_Q)|^2\mathrm{d}x\leqslant C2^{2jn}|Q|,$$

这就是引理3.8所要证的结论。

引理3.9 设Q是二进方体，$p(x)\in C^1(R^n)$满足

$$\int_{R^n}p(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$|p(x)|\leqslant l(Q)^{n+1}/(l(Q)+|x-x_Q|)^{n+1},$$
$$|\mathrm{D}_{x_j}p(x)|\leqslant l(Q)^{n+1}/(l(Q)+|x-x_Q|)^{n+1},$$

$$j=1,2,\cdots,n,$$

其中 x_Q 是Q的中心，则存在函数族$\{\beta_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$，$\beta_j\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$，满足

$$\operatorname{supp}\beta_j\subset 2^jQ,\qquad \int_{R^n}\beta_j(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\|\beta_j\|_{\mathrm{Lip}\,1}\leqslant C2^{-j}l(Q)^{-1},$$

使得

$$p(x)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j(n+1)}\beta_j(x).$$

联系到本章上两节关于"光滑原子"与"光滑分子"的概念，引理3.9实际上给出了"光滑分子"的原子分解定理。

证明 经平移和展缩变换，可以设 $x_Q=0$，$l(Q)=2$。取 $h\in C^\infty(\boldsymbol{R})$，满足

$$\operatorname{supp}h\subset\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right],\qquad \sum_{j=1}^{\infty}h\left(\frac{t}{2^j}\right)\equiv 1,\ \text{当}t>1.$$

令

$$h_0(t)=1-\sum_{j=1}^{\infty}h(t/2^j),$$

则

$$\begin{aligned}p(x)&=h_0(|x|)p(x)+\sum_{j=1}^{\infty}h(2^{-j}|x|)p(x)\\&=\left\{h_0(|x|)p(x)+h(|x|)\int_{R^n}\sum_{k=1}^{\infty}h(2^{-k}|y|)\right.\\&\qquad\left.\times p(y)\mathrm{d}y\Big/\int_{R^n}h(|y|)\mathrm{d}y\right\}\\&\qquad+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{h(2^{-j}|x|)p(x)\right.\\&\qquad-h(2^{-j+1}|x|)\int_{R^n}\sum_{k=j}^{\infty}h(2^{-k}|y|)\\&\qquad\times p(y)\mathrm{d}y\Big/\int_{R^n}h(2^{-j+1}|y|)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$+h(2^{-j}|x|)\int_{R^n}\sum_{k=j+1}^{\infty}h(2^{-k}|y|)$$

$$\times p(y)\mathrm{d}y\Big/\int_{R^n}h(2^{-j}|y|)\mathrm{d}y\Big\}$$

$$=\tilde{\beta}_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\beta}_j(x).$$

显然,

$$\|h(2^{-j}|x|)p(x)\|_{\mathrm{Lip}\,1}\leqslant C2^{-(n+2)j},$$

以及

$$\int_{R^n}\sum_{k=j}^{\infty}h(2^{-k}|y|)p(y)\mathrm{d}y\leqslant C2^{-j}.$$

令$\beta_j(x)=2^{j(n+1)}\tilde{\beta}_j(x)$，则$\{\beta_j\}_{j=0}^{\infty}$满足引理要求。

特别地，如果对于$\nu\in\Sigma_{2m-1}$，$p(x)=(p_1(x),\cdots,p_m(x))$中的$p_j(x)$满足引理3.9的条件，且$p(x)\cdot\nu=0$，则我们构造的$\{\beta_j\}_{j=0}^{\infty}$除了满足引理3.9的结论外，还满足

$$\beta_j^{(i)}(x)\cdot\nu=0,\quad j=0,1,2,\cdots,\qquad 1\leqslant i\leqslant m.$$

下面的引理实际上证明了卷积算子把光滑原子映成光滑分子的倍数。

引理3.10 设$\theta(\xi)\in C^\infty(S_{n-1})$零次齐次，$b_Q$满足引理3.6的条件，则

$$p(x)=(\theta(\xi)\hat{b}_Q(\xi))^\vee(x),$$

满足

$$\int_{R^n}p(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$|p(x)|\leqslant C(\theta)l(Q)^{n+1}/(l(Q)+|x-x_Q|)^{n+1},$$

$$|D_{x_j}p(x)|\leqslant C(\theta)l(Q)^{n+1}/(l(Q)+|x-x_Q|)^{n+2}.$$

证明 由于$p(x)$可以写成

$$p(x)=a_\theta b_Q(x)+\mathrm{p.v.}\int_{R^n}\frac{\Omega_\theta(x-y)}{|x-y|^n}b_Q(y)\mathrm{d}y$$

$$= p^1(x) + p^2(x),$$

显然，$p^1(x)$满足上述要求。当$x\notin 6Q$时，

$$|p^2(x)| = \left|\int_{R^n}\left(\frac{\Omega_\theta(x-y)}{|x-y|^n} - \frac{\Omega_\theta(x-x_Q)}{|x-x_Q|^n}\right)b_Q(y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant C(\theta)l(Q)^{n+1}/|x-x_Q|^{n+1}$$

$$\leqslant C(\theta)l(Q)^{n+1}/(l(Q)+|x-x_Q|)^{n+1},$$

当$x\in 6Q$时，

$$|p^2(x)| \leqslant \left|\int_{|x-y|<10n^{1/2}l(Q)} \frac{\Omega_\theta(x-y)}{|x-y|^n}\right.$$

$$\left.\times[b(y)-b(x)]\mathrm{d}y\right| \leqslant C(\theta)$$

$$\leqslant C(\theta)l(Q)^{n+1}/(l(Q)+|x-x_Q|)^{n+1}.$$

对 $\mathrm{D}_{x_j}p(x)$可以作同样的估计，引理3.10获证。

引理3.11 设$\nu\in\Sigma_{2m-1}$，b_Q 满足引理3.6的条件，且$\|b_Q\|_{\mathrm{Lip}\,2}\leqslant C\cdot l(Q)^{-2}$,则存在函数族$\{\beta_j^{(i)}(x)\}_{j=0}^{\infty}$，$1\leqslant i\leqslant m$,满足 引理 3.9 结论中所列的性质，且

$$\sum_{i=1}^{m} K_i\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j(n+1)}\beta_j^{(i)}\right)(x) = b_Q(x).$$

证明 由引理 3.5，存在 $p(x)$使得 $p(x)\cdot\nu=0$且$(K\cdot p)(x)=b_Q(x)$。再由引理3.4与3.10，知$p(x)$满足引理3.10的结论。利用引理3.9便知引理3.11的结论成立。

第四步 一个技术性引理。

引理3.12 设$\{\lambda_Q\}$是引理 3.6 所断言的序列，它对应于某个 f，$\|f\|_*\leqslant C$，有紧支集．令

$$\eta_k(x) = \sum_{l(Q)=2^{-k}} |\lambda_Q|(1+2^k|x-x_Q|)^{-n-1},$$

$$\varepsilon_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \eta_{k-j}(x),$$

则

(i) $\eta_k(x) \leqslant \varepsilon_k(x) \leqslant C$,

(ii) $\eta_k(x) \leqslant C(2^k|x-y|+1)^{n+1}\eta_k(y)$,

(iii) $\varepsilon_k(x) \leqslant C(2^k|x-y|+1)^{n+1}\varepsilon_k(y)$,

(iv) $\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k(x)\eta_k(x)\delta_{t=2^{-k}} \right\|_C \leqslant C$,

其中$\delta_{t=a}$表示由n维 Lebesgue 测度在超平面$t=a$所导出的测度.

证明 由

$$|\lambda_Q| = C|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\iint_{\hat{Q}} |\psi_t * f(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C\|f\|_* \leqslant C,$$

知

$$\eta_k(x) \leqslant C \sum_{l(Q)=2^{-k}} (1+2^k|x-x_Q|)^{-(n+1)} \leqslant C,$$

即(i)成立. 由于

$$(1+2^k|y-x_Q|)^{n+1} \leqslant C(1+2^k|x-x_Q|)^{n+1}(1+2^k|x-y|)^{n+1},$$

易见(ii)成立. 从而(iii)也成立. 为验证(iv), 任取二进方体J, 有

$$\iint_{T(J)} \sum_{k=-\infty} \eta_k(x)^2 \delta_{t=2^{-k}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C \iint_{T(J)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l(Q)=2^{-k}} |\lambda_Q|^2$$

$$\times (1+2^k|x-x_Q|)^{-(n+1)}\delta_{t=2^{-k}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C \sum_{L:\ l(L)=l(J)} \{1+l(J)^{-1}|x_J-x_L|\}^{-(n+1)}$$

$$\times \sum_{Q:\ Q\subset L} |\lambda_Q|^2|Q|$$

$$\leqslant C|J|,$$

其中最后一个不等式用到了引理3.6的结论。

对$j\geqslant 0$，由上面的估计得

$$\iint_{T(J)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_{k-j}(x)^2\delta_{t=2^{-k}}dxdt\leqslant C(1+j)|J|,$$

再由 Schwarz 不等式

$$\iint_{T(J)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_{k-j}(x)\eta_k(x)\delta_{t=2^{-k}}dxdt\leqslant C(1+j)^{\frac{1}{2}}|J|,$$

于是

$$\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varepsilon_k(x)\eta_k(x)\delta_{t=2^{-k}}\right\|_C$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j(1+j)^{\frac{1}{2}}\leqslant C<\infty.$$

第五步 主要引理3.1的证明。

主要引理3.1的证明 不妨设 $\operatorname{supp} f\subset\{x: |x|<1\}$, $R>2^{M(n+2)}$，其中M是后面决定的充分大的常数。由引理3.6，

$$f(x)=\sum_Q\lambda_Q b_Q,$$

其中$\{\lambda_Q\}$与$\{b_Q\}$满足引理3.6所叙述的要求。由 f 的支集条件，可以假定

$$\lambda_Q=0,\quad 当3Q\cap\{x: |x|<1\}=\varnothing,$$

以及

$$\sum_Q|\lambda_Q|^2|Q|\leqslant C\|f\|_2^2.$$

我们将归纳地构造下面的C^m向量值函数族

$$\{g_k(x)\}_{k=-M-1}^{\infty},\qquad \{\varphi_k(x)\}_{k=-M}^{\infty},$$
$$\{\beta_{Q,j}(x)\},\qquad j=0,1,\cdots,l(Q)\leqslant 2^M,$$

它们满足下面的条件

$$\operatorname{supp}\beta_{Q,j}\subset 2^jQ,\qquad \int_{2^jQ}\beta_{Q,j}(x)\mathrm{d}x=0, \tag{3.7}$$

$$\|\beta_{Q,j}\|_{\mathrm{Lip}\,1}\leqslant C(2^jl(Q))^{-1};$$

$$\left(K\cdot\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j(n+1)}\beta_{Q,j}(\cdot)\right)(x)=b_Q(x); \tag{3.8}$$

$$|\varphi_k(x)|\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}\varepsilon_k(x)\eta_k(x); \tag{3.9}$$

$$\operatorname{supp}\varphi_k\subset\{x:|x|\leqslant 2n^{\frac{1}{2}}\max(2^{M-k},1)\}; \tag{3.10}$$

$$|\varphi_k(x)-\varphi_k(y)|\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}2^k|x-y|,\ \text{当}|x-y|\leqslant 2^{-k}; \tag{3.11}$$

$$g_{-M-1}(x)=(R,0,\cdots,0); \tag{3.12}$$

$$|g_k(x)|=\left(\sum_{j=1}^{m}|g_k^j(x)|^2\right)^{1/2}\equiv R, \tag{3.13}$$

其中

$$g_k(x)=(g_k^1(x),\cdots,g_k^m(x));$$

$$g_k(x)-g_{k-1}(x)=\sum_{Q:\,l(Q)=2^{-k}}\lambda_Q\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j(n+1)}\beta_{Q,j}(x)-\varphi_k(x); \tag{3.14}$$

$$|g_k(x)-g_k(y)|\leqslant C\varepsilon_k(x)2^k|x-y|,\ \text{当}|x-y|<2^{-k}. \tag{3.15}$$

由这些函数族的构造，便可以证明引理3.1的结果。事实上，令$k\geqslant -M$，由(3.14)，有

$$\begin{aligned}
&g_k(x)-g_{-M-1}(x)\\
&=\sum_{Q:\,2^M\geqslant l(Q)\geqslant 2^{-k}}\lambda_Q\sum_{j=0}^{M}2^{-j(n+1)}\beta_{Q,j}(x)-\sum_{h=-M}^{k}\varphi_h(x)\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j(n+1)}\sum_{Q:\,2^M\geqslant l(Q)\geqslant 2^{-k}}\lambda_Q\beta_{Q,j}
\end{aligned}$$

$$-\sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j(n+1)} \sum_{Q:\, 2^M \geq l(Q) \geq 2^{-k}} \lambda_Q \beta_{Q,j}(x)$$

$$-\sum_{h=-M}^{k} \varphi_h(x)$$

$$= \mathrm{I} - \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

由$\sum_Q |\lambda_Q|^2 |Q| \leq C\|f\|_2^2$以及$\{\beta_{Q,j}\}$满足的性质以及引理 3.7，当$k \to \infty$时，Ⅰ与Ⅱ在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中收敛。再由$\varphi_k$的构造知当$k \to \infty$时，Ⅲ在$L^1(\boldsymbol{R}^n)$中收敛。

由$\|g_k - g_h\|_\infty \leq 2R$，有

$$\|g_k - g_h\|_2^2 = \int_0^{2R} 2\alpha |\{x: |g_k(x) - g_h(x)| > \alpha\}| \mathrm{d}\alpha$$

$$\leq \int_0^{2R} 2\alpha |\{x: |\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_h| > \alpha/3\}| \mathrm{d}\alpha$$

$$+ \int_0^{2R} 2\alpha |\{x: |\mathrm{II}_k - \mathrm{II}_h| > \alpha/3\}| \mathrm{d}\alpha$$

$$+ \int_0^{2R} 2\alpha |\{x: |\mathrm{III}_k - \mathrm{III}_h| > \alpha/3\}| \mathrm{d}\alpha$$

$$\leq 9\|\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_h\|_2^2 + 9\|\mathrm{II}_k - \mathrm{II}_h\|_2^2$$

$$+ 6R\|\mathrm{III}_k - \mathrm{III}_h\|_1 \to 0, \text{ 当 } k, h \to \infty.$$

因此可以定义

$$g(x) = g_{-M-1}(x) + \lim_{\substack{k \to \infty \\ L^2(\boldsymbol{R}^n)}} (g_k(x) - g_{k-1}(x)).$$

由g_k的构造知

$$\operatorname{supp}(g-(R,0,\cdots,0))\subset\{x:|x|\leqslant 2n^{1/2}2^{2M}\},$$

这就是(3.5)。(3.4)是显然的，因为

$$|g(x)|=\left(\sum_{j=1}^{m}|g_j(x)|^2\right)^{1/2}=|g_{-M-1}(x)|=R.$$

剩下只需验证(3.3)。由于

$$\begin{aligned}K\cdot g_k&=K\cdot((R,0,\cdots,0)+\text{I}_k-\text{II}_k-\text{III}_k)\\&=K\cdot\text{I}_k-K\cdot\text{II}_k-K\cdot\text{III}_k\\&=\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i(n+1)}\\&\quad\times\sum_{Q:\,2^M\geqslant l(Q)>2^{-k}}\lambda_Q K\cdot\beta_{Q,j}-K\cdot\text{II}_k-K\cdot\text{III}_k\\&=\sum_{Q:\,2^M\geqslant l(Q)>2^{-k}}\lambda_Q b_Q(x)-K\cdot\text{II}_k-K\cdot\text{III}_k\end{aligned}$$

（模去常数），

有

$$\begin{aligned}K\cdot g=f&-\sum_{l(Q)>2^M}\lambda_Q b_Q\\&-K\cdot\left(\sum_{j=M+1}^{\infty}2^{-j(n+1)}\sum_{Q:\,2^M\geqslant l(Q)}\lambda_Q\beta_{Q,j}(\cdot)\right)\\&-K\cdot\left(\sum_{j=-M}^{\infty}\varphi_j\right).\end{aligned}$$

因为K在BMO($\boldsymbol{R}^n$)有界（见引理3.10，也可参看第十章定理1.1），所以只需证明下面的估计：

$$\left\|\sum_{l(Q)>2^M}\lambda_Q b_Q\right\|_*\leqslant C2^{-Mn};\tag{3.16}$$

$$\left\|\sum_{j=M+1}^{\infty}2^{-j(n+1)}\sum_{Q:\,2^M\geqslant l(Q)}\lambda_Q\beta_{Q,j}\right\|_*\leqslant C2^{-M},\tag{3.17}$$

$$\left\| \sum_{j=-M} \varphi_j \right\|_* \leqslant C2^{M(n+2)} R^{-1}. \tag{3.18}$$

事实上，如果(3.16)—(3.18)成立，则先取M充分大，然后再取R充分大，便可得到(3.3)：

$$\|K \cdot g - f\|_* \leqslant 1/5.$$

现证(3.16)成立。由

$$|\lambda_Q| = C|Q|^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\hat{Q}} |\psi_t * f(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}$$

以及$\operatorname{supp} f \subset \{|x| < 1\}$，$\|f\|_* < 1$，容易验证$|\lambda_Q| \leqslant C|Q|^{-1}$。已知$|b_Q(x)| \leqslant C$，故

$$\left| \sum_{Q:\, l(Q) > 2^M} \lambda_Q b_Q(x) \right| \leqslant C \sum_{j=1} 2^{-Mnj} \leqslant C2^{-Mn},$$

即得(3.16)

由引理3.6中涉及Carleson测度的性质与引理3.8，

$$\left\| \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j(n+1)} \sum_{Q:\, 2^M \ l(Q)} \lambda_Q \beta_{Q,j} \right\|_*$$

$$\leqslant \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j(n+1)} \left\| \sum_{l(Q) < 2^M} \lambda_Q \beta_{Q,j} \right\|_*$$

$$\leqslant C \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j(n+1)} 2^{jn} \leqslant C2^{-M},$$

这就证明了(3.17)。

由$\{\varphi_k\}$的构造(3.9)与引理3.12的(iv)，对任意取定的方体J，有

$$|J|^{-1} \int_J \left| \sum_{k > -\log_2 l(J)} \varphi_k(x) \right| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)} R^{-1} |J|^{-1} \int_J \sum_{k \geqslant -\log_2 l(J)} \varepsilon_k(x) \eta_k(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}.$$

如果$x,y\in J$，则

$$\sum_{k<-\log_2 l(J)}|\varphi_k(x)-\varphi_k(y)|$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}\sum_{k\leqslant-\log_2 l(J)}2^k|x-y|$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1},$$

这就证明了(3.18)。

现在我们来归纳地构造$\{g_k\}$，$\{\beta_{Q,j}\}$与$\{\varphi_k\}$。首先定义$g_{-M-1}(x)=(R,0,\cdots,0)$。假设$\{g_h\}_{h=-M-1}^{k-1}$，$\{\varphi_h\}_{h=-M}^{k-1}$，以及$\{\beta_{Q,j}\}_{2^M\geq l(Q)\geq 2^{-k+1},j=0,1,2,\cdots}$已经构造出来并满足条件(3.7)—(3.15)。

对$\nu=g_{k-1}(x_Q)\lrcorner jb_Q(x)$，$l(Q)=2^{-k}$，应用引理 3.11，得到$\{\beta_{Q,j}\}_{j=0,1,\cdots}$满足(3.7)，(3.8)。特别地

$$\beta_{Q,j}(x)\circ\nu\equiv 0, \tag{3.19}$$

这条件对后面的估计起到了关键的作用。

首先注意到$|\beta_{Q,j}(x)|\leqslant C$，

$$\sum_{l(Q)=2^{-k}}|\lambda_Q|\sum_{j=0}^{M}2^{-j(n+1)}|\beta_{Q,j}(x)|$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{M}2^{-j(n+1)}\sum_{\substack{l(Q)=2^{-k}\\ \operatorname{dist}(x,Q)\leqslant 2^{j-k}}}|\lambda_Q|.$$

若$2^{l-k-1}\leqslant|x-x_Q|<2^{l-k}$，则

$$\sum_{j=0}^{M}2^{-j(n+1)}|\beta_{Q,j}(x)|\leqslant C\sum_{j=l}^{M}2^{-j(n+1)}\leqslant C2^{-l(n+1)}$$

$$\leqslant C(1+2^k|x-x_Q|)^{-(n+1)},$$

故

$$\sum_{l(Q)=2^{-k}}|\lambda_Q|\sum_{j=0}^{M}2^{-j(n+1)}|\beta_{Q,j}(x)|$$

$$\leqslant C \sum_{l(Q)=2^{-k}} (1+2^k|x-x_Q|)^{-(n+1)}$$

$$= C\eta_k(x).$$

其次，当$|x-y|<2^{-k}$时，

$$\sum_{l(Q)=2^{-k}} |\lambda_Q| \sum_{j=0}^{M} 2^{-j(n+1)} |\beta_{Q_j}(x) - \beta_{Q_j}(y)|$$

$$\leqslant C \sum_{j=0}^{M} 2^{-j(n+1)} \sum_{\substack{l(Q)=2^{-k} \\ \text{dist}(x,Q)\leqslant 2^{1+j-k}}} |\lambda_Q||x-y|2^{k-j}$$

$$\leqslant C\, 2^k |x-y| \eta_k(x).$$

当$0\leqslant j\leqslant M$且$\beta_{Q,j}(x)\neq 0$，即$x\in 2^jQ$，如果$|x-x_Q|\leqslant 2^{-k+1}$，则显然

$$|g_{k-1}(x)-g_{k-1}(x_Q)|\leqslant C\varepsilon_{k-1}(x)2^{k-1}|x-x_Q|,$$

否则在x与x_Q之间插入分点x_l，使得$|x_{l+1}-x_l|<2^{-k+1}$，则

$$|g_{k-1}(x)-g_{k-1}(x_Q)| \leqslant \sum_{l=0}^{2^M} |g_{k-1}(x_{l+1})-g_{k-1}(x_l)|$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{2^M} C\varepsilon_{k-1}(x_{l+1})2^{k-1}|x_{l+1}-x_l|$$

$$\leqslant C2^{M(n+1)}\varepsilon_{k-1}(x)2^{k-1}|x-x_Q|.$$

由(3.19)知，对$0\leqslant j\leqslant M$，$\beta_{Q,j}(x)\neq 0$，有

$$\left|\frac{g_{k-1}(x)}{R}\frac{\beta_{Q,j}(x)}{|\beta_{Q,j}(x)|} = \frac{[g_{k-1}(x)-g_{k-1}(x_Q)]\beta_{Q,j}(x)}{R|\beta_{Q,j}(x)|}\right|$$

$$\leqslant C2^{M(n+1)}R^{-1}\varepsilon_{k-1}(x)2^{k-1}|x-x_Q|$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}\varepsilon_{k-1}(x).$$

现构造$g_k(x)$与$\varphi_k(x)$。令

$$h(x) = \sum_{l(Q)=2^{-k}} \lambda_Q \sum_{j=0}^{M} 2^{-j(n+1)}\beta_{Q,j}(x),$$

$$K(x) = g_{k-1}(x) + h(x).$$

显然，由上面的证明知

$$|h(x)| \leqslant \sum_{l(Q)=2^{-k}} |\lambda_Q| \sum_{j=0}^{M} 2^{-j(n+1)} |\beta_{Q,j}(x)|$$
$$\leqslant C\eta_k(x),$$
$$|h(x) - h(y)| \leqslant C2^k |x-y| \eta_k(x).$$

如果$|x-y| < 2^{-k}$，则由g_{k-1}所具有的性质，知

$$|K(x) - K(y)| \leqslant |g_{k-1}(x) - g_{k-1}(y)| + |h(x) - h(y)|$$
$$\leqslant C[2^{-1}\varepsilon_{k-1}(x) + \eta_k(x)]2^k |x-y|$$
$$\leqslant C\varepsilon_k(x) 2^k |x-y|.$$

根据我们的符号$|K(x)| = \left(\sum_{j=1}^{m} |K_j(x)|^2\right)^{1/2}$，并注意到

$$|g_{k-1}(x)| = R,$$

有

$$||K(x)| - R| = ||g_{k-1}(x) + h(x)| - R|$$
$$\leqslant |h(x)| \leqslant C\eta_k(x) \leqslant C,$$

同时

$$||K(x)| - R| = \left|\frac{|K(x)|^2 - R^2}{|K(x)| + R}\right| \leqslant \frac{|2g_{k-1}(x)h(x) + h^2(x)|}{R}.$$

注意到$g_{k-1}(x_Q)\cdot h(x) = 0$，便得

$$||K(x)| - R| \leqslant CR^{-1}(|g_{k-1}(x) - g_{k-1}(x_Q)||h| + |h^2|)$$
$$\leqslant CR^{-1}(\eta_k(x) 2^{M(n+2)} \varepsilon_{k-1}(x) + \eta_k^2(x))$$
$$\leqslant CR^{-1} 2^{M(n+2)} \varepsilon_k(x) \eta_k(x).$$

令$g_k(x) = RK(x)/|K(x)|$.显然$|g_k(x)| = R$. 由于$||K(x)| - R| \leqslant C$，只要取R充分大，便有$R/|K(x)| < 2$. 故

$$|g_k(x) - g_k(y)| = R\left|\frac{K(x)}{|K(x)|} - \frac{K(y)}{|K(y)|}\right|$$

$$= R\left|\frac{K(x)-K(y)}{|K(x)|} - K(y)\left[\frac{1}{|K(x)|} - \frac{1}{|K(y)|}\right]\right|$$

$$\leqslant R\frac{|K(x)-K(y)|}{|K(x)|} + R|K(y)|\frac{||K(x)|-|K(y)||}{|K(x)K(y)|}$$

$$\leqslant 2R\frac{|K(x)-K(y)|}{|K(x)|}$$

$$\leqslant 4|K(x)-K(y)| \leqslant C\varepsilon_k(x)2^k|x-y|,$$

只要$|x-y|\leqslant 2^{-k}$。这说明g_k满足所要求的条件。

令$\varphi_k(x)=K(x)-g_k(x)$。(3.14)显然成立。由于当$3Q\cap\{|x|\leqslant 1\}=\varnothing$时$\lambda_Q=0$，(3.10)成立，而

$$|\varphi_k(x)| = \left|K(x)-R\frac{K(x)}{|K(x)|}\right| = ||K(x)|-R|$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}\varepsilon_k(x)\eta_k(x),$$

这就是(3.9)。最后验证(3.11)。如果$|x-y|\leqslant 2^{-k}$，则

$$\varphi_k(x)-\varphi_k(y) = |K(x)|^{-1}(|K(x)|-R)(K(x)-K(y))$$

$$+K(y)R\frac{|K(x)|-|K(y)|}{|K(x)K(y)|}$$

$$= \text{I} + \text{II}.$$

$$|\text{I}| \leqslant C\varepsilon_k(x)2^k|x-y|\,|K(x)|^{-1}|K(x)-R|$$

$$\leqslant C\varepsilon_k(x)2^k|x-y|\,|K(x)|^{-1}$$

$$\leqslant C\varepsilon_k(x)2^k|x-y|R^{-1},$$

$$|\text{II}| \leqslant 2||K(x)|-|K(y)||$$

$$\leqslant 2||g_{k-1}(x)+h(x)|-|g_{k-1}(y)+h(x)||$$

$$+2||g_{k-1}(y)+h(x)|-|g_{k-1}(y)+h(y)||$$

$$= \text{II}' + \text{II}''.$$

注意到$g_{k-1}^2(x)=g_{k-1}^2(y)=R^2$，有

$$\text{II}' \leqslant 2\frac{\left| |g_{k-1}(x)+h(x)|^2 - |g_{k-1}(y)+h(x)|^2 \right|}{|g_{k-1}(x)+h(x)| + |g_{k-1}(y)+h(x)|}$$

$$\leqslant 2\frac{|g_{k-1}^2(x) - g_{k-1}^2(y) + 2(g_{k-1}(x) - g_{k-1}(y)) \cdot h(x)|}{|K(x)|}$$

$$\leqslant CR^{-1}|h(x)|2^{k-1}|x-y| \leqslant CR^{-1}2^k|x-y|.$$

类似于上面的证明，如果$\beta_{Q,j}(x) - \beta_{Q,j}(y) \neq 0$，$0 \leqslant j \leqslant M$，则

$$\left| \frac{g_{k-1}(y)+h(y)}{|g_{k-1}(y)+h(y)|} \cdot \frac{\beta_{Q,j}(x) - \beta_{Q,j}(y)}{|\beta_{Q,j}(x) - \beta_{Q,j}(y)|} \right|$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}.$$

故

$$\text{II}'' \leqslant \left| \frac{|g_{k-1}(y)+h(x)|^2 - |g_{k-1}(y)+h(y)|^2}{|g_{k-1}(y)+h(x)| + |g_{k-1}(y)+h(y)|} \right|$$

$$\leqslant C\left\{ \frac{|(h(x)-h(y)) \cdot g_{k-1}(y)|}{|K(y)|} + \frac{|h(x)|^2 - |h(y)|^2}{|K(y)|} \right\}$$

$$\leqslant C2^{M(n+2)}R^{-1}2^k|x-y|.$$

这就证明了(3.11)。

至此，我们完成了定理3.1的第二部分的证明。

定理3.1第一部分的证明 我们要证明的是，若

$$H^1(\boldsymbol{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\boldsymbol{R}^n): \sum_{j=1}^m \|K_j f\|_1 < \infty \right\},$$

则(3.2)成立，其中$K_j f = (\theta_j \hat{f})^\vee$。

用反证法。如果(3.2)不成立，不妨设

$$\theta_j(1,0,\cdots,0) = \theta_j(-1,0,\cdots,0) = \lambda_j$$

对$1 \leqslant j \leqslant n$成立。由$H^1$的对偶定理，如果$g \in \mathrm{BMO}$，则存在$g_j \in L^\infty$，使得对所有$f \in H^1_{0,0} = \{f \in H^1, f$具有紧支集$\}$，

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} g f \mathrm{d}x = \sum \int_{\boldsymbol{R}^n} g_j f_j \mathrm{d}x,$$

其中$\hat{f}_j=\theta_j\hat{f}$。这里用到了条件：$\{K_j\}$刻画了$H^1(\boldsymbol{R}^n)$。

取$h(x_1)\in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R})$，但$h(x_1)\notin L^\infty(\boldsymbol{R})$。令$g(x_1,\cdots,x_n)=h(x_1)$。我们可以假设$g_j$仅依赖于$x_1$，否则，只需考虑与下面的测度作卷积

$$\delta_{x_1}N^{1-n}\psi\left(\frac{x_2}{N}\right)\psi\left(\frac{x_3}{N}\right)\cdots\psi\left(\frac{x_n}{N}\right)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中$\psi\in\mathscr{D}$，$\int_{R^n}\psi\,\mathrm{d}x=1$,然后再取$*$弱极限。即不妨设$g_j(x)=h_j(x_1)$，$h_j\in L^\infty(\boldsymbol{R})$。

定义P：$L^1(\boldsymbol{R}^n)\to L^1(\boldsymbol{R})$如下：

$$Pf(x_1)=\int_{R^{n-1}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

显然$\widehat{Pf}(t)=\hat{f}(t,0,\cdots,0)$，$\hat{f}_j=\theta_j\hat{f}$，

$$\widehat{Pf}_j(t)=\theta_j(t,0,\cdots,0)\hat{f}(t,0,\cdots,0),$$

因此

$$\widehat{Pf}_j(t)=\lambda_j\widehat{Pf}(t).$$

故只要$f\in H^1_{0\,0}(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\int_R hPf\,\mathrm{d}x_1=\int_{R^n}gf\,\mathrm{d}x=\sum\int_{R^n}g_jf_j\,\mathrm{d}x=\int_R\sum\lambda_jh_jPf\,\mathrm{d}x_1.$$

由于Pf可以是$H^1_{0,0}(\boldsymbol{R})$中任意函数，于是

$$h=C+\sum_j\lambda_jh_j,$$

从而推出$h\in L^\infty$，与我们选取$h\notin L^\infty$矛盾。定理3.1的第一部分获证。

§9.4 注释与进一步的结果

注释

Besov空间是在研究Sobolev空间在低维流形上的限制问题提

出来的。[St4]中有用Poisson积分处理Besov空间的详述。系统地用Littlewood-Paley分解整理Besov空间理论的属于J. Peetre[P1]。Triebel-Lizorkin空间的系统论述可参阅H. Triebel的书[Tr]。本章关于Besov空间、Triebel-Lizorkin空间的"原子""分子"分解的结果属于M. Frazier与B. Jawerth[FJ1—3]。定理2.1是C. Fefferman-Stein于1971年证明的[FS1]。

有关定理3.1的来源，请参看本书第三章的进一步的结果4。定理3.1第二部分的证明见[U2]。

进一步的结果

1. 非齐次Besov空间可如下定义。设φ满足(1.1)—(1.5)，再设$\Phi\in\mathscr{S}$，在$\{|\xi|\leqslant 1\}$内$\hat{\Phi}(\xi)\neq 0$，当$|\xi|\leqslant\frac{4}{5}$时$|\hat{\Phi}(\xi)|\geqslant C>0$。对$\alpha\in\boldsymbol{R}$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$0<q\leqslant\infty$，定义拟范数

$$\|f\|_{B_p^{\alpha,q}}=\|\Phi*f\|_p+\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}(2^{\nu\alpha}\|\varphi_\nu*f\|_p)^q\right]^{1/q},$$

以及

$$B_p^{\alpha,q}=\{f\mid\in\mathscr{S}',\ \|f\|_{B_p^{\alpha,q}}<\infty\}.$$

Besov空间齐次与非齐次的意义是对展缩变换而言的，齐次Besov空间对展缩变换$f(x)\to\delta^{\alpha-n/p}f\left(\frac{x}{\delta}\right)$保持拟范数不变。

Besov空间有许多等价的刻画。在这里仅对某些参数给出其中的一部分。下述的每一条都是$B_p^{\alpha,q}$的等价刻画。

(i) $f\in L^p$，使得

$$\|f\|_p+\left[\int_{R^n}\left(\frac{\|\Delta_h f\|_p}{|h|^\alpha}\right)^q\frac{dh}{|h|^n}\right]^{1/q}<\infty,$$

其中$\Delta_h f$表示f的一阶差分，$0<\alpha<1$。

(ii) $f\in W_p^{[\alpha]}$，$D^\beta f\in B_p^{\alpha-[\alpha],q}$只要$|\beta|\leqslant[\alpha]$，$0<\alpha<\infty$，其中$W_p^m$表示Sobolev空间。

(iii) $f\in L^p$，使得

$$\left[\int_0^\infty\left(\frac{\left\|t\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_p}{t^a}\right)^q\frac{dt}{t}\right]^{1/q}<\infty,$$

其中$0<a<1$，u是f的Poisson积分。

(iv) $B_p^{a,q}$可看作位势空间的内插空间。对$f\in\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，定义

$$J^s f(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi),$$
$$P_p^s=\{f|\in\mathscr{S}',\ J^s f\in L^p\},$$
$$\|f\|_{P_p^s}=\|J^s f\|_p,$$

则有

$$B_p^{a,q}=(P_p^{s_0},\ P_p^{s_1})_{\theta q},$$

其中$a=(1-\theta)s_0+\theta s_1$，$0<\theta<1$。

参阅[P1]，[St4]。

2. 本章前两节的结果完全可以推广到非齐次 Besov 空间与 Triebel-Lizorkin 空间。例如，若$-\infty<a<\infty$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$0<q\leqslant\infty$，$f\in B_p^{a,q}$，则$f$有如下的分解

$$f=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}S_k b_k+\sum_{\nu=0}^\infty\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}S_Q a_Q,$$

其中a_Q是(p,a)原子，b_k满足$\operatorname{supp}b_k\subset 3Q_k$中，$|\partial^\gamma b_k(x)|\leqslant 1$当$0\leqslant|\gamma|\leqslant K$。进一步

$$\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}|S_k|^p\right)^{1/p}+\left[\sum_{\nu=0}^\infty\left(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}|S_Q|^p\right)^{q/p}\right]^{1/q}\leqslant C\|f\|_{B_p^{a,q}};$$

反过来，若

$$f=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}S_k m_k+\sum_{\nu=0}^\infty\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}S_Q m_Q,$$

其中m_Q是(p,a)分子，m_k满足

$$|\partial^\gamma m_k(x)|\leqslant(1+|x-x_Q|)^{-M-|\gamma|},\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant K,$$

其中M是一个充分大的常数，则$f\in B_p^{\alpha,q}$，且

$$\|f\|_{B_p^{\alpha,q}}\leqslant C\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}|S_k|^p\Big)^{1/p}+C\Big[\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{l(Q)=2^{-\nu}}|S_Q|^p\Big)^{q/p}\Big]^{1/q}.$$

参看[FJ 1—3]。

3．最近，邓东皋、韩永生证明了Besov空间与Triebel-Lizorkin空间可以用非卷积算子族刻画。

称$\{S_t\}_{t>0}$是ε-算子族，$0<\varepsilon\leqslant 1$，如果S_t的核$S_t(x,y)$满足

(i) $|S_t(x,y)|\leqslant\dfrac{Ct^\varepsilon}{t^{n+\varepsilon}+|x-y|^{n+\varepsilon}}$,

(ii)

$$|S_t(y,x)-S_t(y',x)|+|S_t(x,y)-S_t(x,y')|$$
$$\leqslant C\Big(\frac{|y-y'|}{t+|x-y|}\Big)^\varepsilon\frac{t^\varepsilon}{t^{n+\varepsilon}+|x-y|^{n+\varepsilon}},$$

当$|y-y'|\leqslant\frac{1}{2}(t+|x-y|)$时。

结论是：若$\{Q_t\}$，$\{Q_t^*\}$是ε-算子族，$Q_t(1)=Q_t^*(1)=0$，且$\int_0^\infty Q_t\frac{dt}{t}=I$，$I$是$L^2$的恒等算子，则对$-\varepsilon<\alpha<\varepsilon$，$1\leqslant p,q<\infty$，有

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\alpha,q}}\sim\Big[\int_0^\infty(t^{-\alpha}\|Q_t(f)\|_p)^q\frac{dt}{t}\Big]^{1/q}$$

以及

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}}\sim\Big\|\Big(\int_0^\infty|t^{-\alpha}Q_t(f)|^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}\Big\|_p.$$

参见[DeH1]。

4．波分解(decomposition of wavelets)　本章讲述的BMO、$\dot{B}_p^{\alpha,q}$、$\dot{F}_p^{\alpha,q}$的"原子"分解，实质上都是在Banach空间(或拟赋范空间)按Schauder基的一种展开。在这里，基函数a_Q相互

间没有正交性，只有某种近似正交性。近年来，Y.Meyer，P.G. Lemarié 等证明了，存在小波函数(wavelets)$\psi_1,\cdots,\psi_m$，它们具有一定的光滑性，在∞下降得足够快，满足消失矩条件使得

$$2^{-jn/2}\psi_l(2^{-j}x-k),$$
$$l=1,2,\cdots,m,\quad j\in \boldsymbol{Z},\quad k\in \boldsymbol{Z}^n$$

构成 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 的完备正交基，并且它们组成 L^p、H^1、BMO、$\dot{F}_p^{\alpha,q}$、$\dot{B}_p^{\alpha,q}$ 的无条件基，也就是说，函数按 wavelets 展开，其系数组成的序列，按一定的范数装备后，构成与函数空间同构的序列空间。参见[M 4],[M 6],[CM 6],[DeP]。

5. 定理 3.1 第二部分中 f 具有紧支集的条件是可以去掉的(参见[U 4])。

6. 定理 3.1 的一个推论是，若(3.2)成立，即

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\theta_1(\xi) & \cdots & \theta_m(\xi)\\ \theta_1(-\xi) & \cdots & \theta_m(-\xi)\end{pmatrix}=2,$$

则

$$C_1\|f\|_{H^1}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\|K_j(f)\|_1\leqslant C_2\|f\|_{H^1},$$

其中$K_j(f)=(\theta_j\hat{f})^\vee$。参阅[U 2]。

第十章　Calderón–Zygmund算子与原子分解

本章将研究奇异积分算子在 H^p 空间上的作用以及原子分解技巧如何应用于研究奇异积分算子的有界性。

从五十年代初 Calderón–Zygmund 的奠基性工作以来，奇异积分算子已经经历了三代了。第一代的奇异积分算子主要是用主值定义的卷积算子

$$T(f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\Omega(x)$ 是 0 次齐次函数，在 R^n 的单位球面 Σ_{n-1} 有稍强一些的连续性，且 $\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(x)\mathrm{d}\sigma(x)=0$。Calderón–Zygmund 的奠基性工作是证明了 T 的 $L^p(1<p<\infty)$ 的有界性。他们的方法是，第一步用卷积算子的 Fourier 变换以及 Plancherel 定理，得到 T 的 L^2 有界性。第二步是通过 Calderón–Zygmund 分解，证明 T 是弱(1,1)型的，然后用 Marcinkiewicz 内插定理得到 T 是 $L^p(1<p<2)$ 有界的。$p>2$ 的情形可以用对偶性解决。这些，我们已在第 1 章中作了叙述。这种卷积型奇异积分算子在偏微分方程中主要应用于常系数线性（椭圆型）方程。

奇异积分算子的第二代是伪微分算子，它包括了

$$T(f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $K(x,y)=L(x,x-y)$，$L(x,z)$ 满足相应的条件。伪微分算子在变系数偏微分方程中有重要的应用。

奇异积分算子的第三代开始于对 Calderón–Zygmund 算子的

研究。它可以完全是非卷积型的，因此它不能统一地用积分主值定义，但它包括了卷积型的奇异积分算子以及主要的(0阶)伪微分算子。它在非光滑（系数或区域）的偏微分方程中以及非线性分析中显示出愈来愈多的应用。在研究方法上，也要求有不同于卷积型算子的新思想。

本章第一节介绍 Calderón-Zygmund 算子在 Hardy 空间的作用。第二节介绍关于 Calderón-Zygmund 算子 L^2 有界性的判别准则——$T(1)$ 定理。第三节应用原子分解技巧，研究 Calderón-Zygmund 算子在其它空间的有界性。

§ 10.1 Calderón-Zygmund 算子在 H^p 空间上的有界性

我们要考虑的是很一般的算子，它由核 $K(x,y)$定义。例如，看 $n=1$ 的情形。设 $K(x,y)$ 具有一定的奇性：$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-1}$，$\left|\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\right|\leqslant C|x-y|^{-2}$，甚至 $K(x,y)=-K(y,x)$。这时，我们仍不能用主值来定义算子，因为即使对光滑的f，当$\varepsilon\to 0$时，$\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$ 也可能没有极限。例如，取

$$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^k(x+y)}2^k\theta(2^k(x-y)),$$

其中$\theta(t)\in C^\infty$是奇函数，$\operatorname{supp}\theta\subset\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$，且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin t\,\theta(t)\mathrm{d}t=1.$$

取 $f(y)\in C_0^\infty$，f 在$[-10,10]$上恒等于 1，则

$$\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{|x-y|\geq \varepsilon} \sum_{k=0} e^{i2^k(x+y)} 2^k\theta(2^k(x-y))f(y)dy$$

$$= \sum_{2^k \leq \frac{4}{3\varepsilon}} e^{i2^{k+1}x} \int_{|u|\geq \varepsilon} e^{-iu}\theta(u)du$$

$$= \sum_{2^k \leq \frac{4}{3\varepsilon}} e^{i2^{k+1}x}.$$

显然，当 $\varepsilon \to 0$ 时，最后这个和是处处发散的。

这例子表明，我们只能用广义函数意义的收敛代替几乎处处意义的收敛。

记 $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ 为 Schwartz 试验函数空间，它由全体紧支集的无穷次可微函数组成。$\mathscr{D}'$ 是它的对偶空间，即广义函数空间. 设 $T: \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ 是连续线性算子。则由 Schwartz 核定理，存在分布核 $K \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle K, \varphi \otimes \psi \rangle,$$

对所有的 $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ 成立。我们考虑的 T 是奇异积分，即它的核在 $x = y$ 具有奇性。我们用下面的 Calderón–Zygmund 核描述它。

定义1.1 我们称 $K \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$ 为标准核，如果它在 $\Omega = \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \setminus \{x = y\}$ 上是连续函数，且在 Ω 满足

$$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}; \tag{1.1}$$

当 $|y-y'| < \frac{1}{2}|x-y|$ 时，有

$$|K(x,y) - K(x,y')| \leq C|y-y'|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}; \tag{1.2}$$

当 $|x-x'| < \frac{1}{2}|x-y|$ 时，有

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq C|x-x'|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}, \tag{1.3}$$

其中 $0 < \gamma \leq 1$。这时记 $K \in \mathrm{SK}(\gamma)$。

当算子T的分布核$K\in \mathrm{SK}(\gamma)$时，只要$\varphi,\psi\in\mathscr{D}$，$\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp}\psi=\varnothing$，则有

$$\langle T\varphi,\psi\rangle=\iint_{R^n\times R^n}K(x,y)\varphi(y)\psi(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

这等价于说

$$T(\varphi)(x)=\int_{R^n}K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

对$x\in\operatorname{supp}\varphi$成立。于是我们有

定义1.2 设算子$T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$线性连续。我们称$T$为Calderón-Zygmund 算子，如果

(i) T可以开拓为$L^2(\boldsymbol{R}^n)$上的有界算子；

(ii) 存在$K(x,y)\in\mathrm{SK}(\gamma)$，使得对$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中任意具有紧支集的$f$，有

$$T(f)(x)=\int_{R^n}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

对几乎所有的$x\in(\operatorname{supp}f)^c$成立。这时记$T\in\mathrm{CZO}(\gamma)$，或简记为$T\in\mathrm{CZO}$。

注意，有时T只具有性质(ii)，而不一定有性质(i)，也记$T\in\mathrm{CZK}(\gamma)$或$T\in\mathrm{CZK}$。

显然，经典的卷积型奇异积分算子（§1.3 的例 1），当Ω在Σ_{n-1}满足 Lipschitz 条件时，是 Calderón-Zygmund 算子。另外还有，全体 0 阶经典伪微分算子都是CZO。

例1 仿积(paraproduct)。设$\varphi,\psi,\bar{\psi}\in\mathscr{S}$是径向函数，

$$\int_{R^n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \int_{R^n}\psi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{R^n}\bar{\psi}(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

记$\varphi_t(\cdot)=\frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$，

$$P_t(f)=\varphi_t*f,\quad Q_t(f)=\psi_t*f,\quad \bar{Q}_t(f)=\bar{\psi}_t*f.$$

则仿积定义为

$$\Pi(f)=\Pi_b(f)=\int_0^\infty \bar{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))\frac{\mathrm{d}t}{t}. \qquad (1.4)$$

当 $b\in \mathrm{BMO}$ 时，仿积是 Calderón-Zygmund 算子。

首先，由于 $\varphi\in\mathscr{S}$，知

$$|\varphi_t(x-y)|\leqslant\frac{C}{t^n}\frac{1}{1+\left|\frac{x-y}{t}\right|^{n+1}}=\frac{Ct}{t^{n+1}+|x-y|^{n+1}}.$$

对 ψ_t 与 $\bar{\psi}_t$ 有类似的估计。设 $m_t(b)$ 为 b 在以 x 为中心以 t 为边长的方体上的平均，用§7.1中定理1.3，知

$$\left|\int_{R^n}\psi_t(x-y)b(y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_{R^n}\psi_t(x-y)(b(y)-m_t(b))\,\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\int_{R^n}\frac{t|b(y)-m_t(b)|}{t^{n+1}+|x-y|^{n+1}}\mathrm{d}y\leqslant C\|b\|_*,$$

即 $\|Q_t(b)\|_\infty\leqslant C\|b\|_*$，这里 $\|b\|_*$ 表示 b 的 BMO 范数。同理有 $\|\nabla_x Q_t(b)(x)\|_\infty\leqslant Ct^{-1}\|b\|_*$。记 $\bar{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))$ 的核为 $K_t(x,y)$，即

$$\bar{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))(x)=\int_{R^n}K_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

则显然有

$$|K_t(x,y)|=\left|\frac{1}{t^{2n}}\int_{R^n}\bar{\psi}\left(\frac{x-z}{t}\right)\varphi\left(\frac{z-y}{t}\right)Q_t(b)(z)\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant C\|b\|_*\Phi_t(x-y),$$

其中 $\Phi(x)$ 满足

$$|\Phi(x)|\leqslant\frac{C}{1+|x|^{n+1}}.$$

这样，Π_b 的核 $K(x,y)$ 满足

$$|K(x,y)| = \left|\int_0^\infty K_t(x,y)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leqslant C\|b\|_* \int_0^\infty |\Phi_t(x-y)|\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C\|b\|_* \left(\int_0^{|x-y|} + \int_{|x-y|}^\infty\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1} + |x-y|^{n+1}}$$

$$\leqslant \frac{C\|b\|_*}{|x-y|^n}.$$

同理由$\|\nabla_x Q_t(b)(x)\|_\infty \leqslant Ct^{-1}\|b\|_*$可证得$|\nabla K_t(x,y)| \leqslant C\|b\|_* t^{-1} \cdot \Phi_t(x-y)$，从而有$|\nabla K(x,y)| \leqslant C\|b\|_* |x-y|^{-n-1}$，即$K$满足(1.2)与(1.3)，这时$\gamma=1$。即证得了$\Pi_b \in \mathrm{CZK}$。

为证明Π_b是L^2有界的，设$g \in L^2$，$\|g\|_2 \leqslant 1$，则

$$|\langle \Pi_b(f), g\rangle| = \left|\iint_{R_+^{n+1}} \bar{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))(x)g(x)\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|$$

$$= \left|\iint_{R_+^{n+1}} Q_t(b)(x)P_t(f)(x)\bar{Q}_t^*(g)(x)\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|$$

$$\leqslant \left(\iint_{R_+^{n+1}} |P_t(f)(x)|^2 |Q_t(b)(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}$$

$$\times \left(\iint_{R_+^{n+1}} |\bar{Q}_t^*(g)(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}.$$

用 Plancherel 定理，得到

$$\iint_{R_+^{n+1}} |\bar{Q}_t^*(g)|^2 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \int_{R^n} |\hat{\psi}(\xi t)|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \int_0^\infty |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\|g\|_2^2 \leqslant C.$$

而由$b \in \mathrm{BMO}$知$|Q_t(b)|^2\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{t}$是$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$的 Carleson 测度。再由 Carleson 不等式（见§7.1定理1.6）知

$$\iint_{R_+^{n+1}} |P_t(f)(x)|^2 |Q_t(b)(x)|^2 \frac{dx\,dt}{t}$$

$$\leqslant C\int_{R^n} |P^*(f)(x)|^2 \,dx \leqslant C\|f\|_2^2.$$

这就证明了Π_b是L^2有界的，从而证明了$\Pi_b \in$ CZO。

下面的三个例子，都是CZO。它们的核满足大小条件(1.1)与光滑性条件(1.2)、(1.3)都比较容易验证。它们的L^2有界性，证明都比较复杂，我们在此省略了。我们将在§10.4中给出文献索引。在下一节，我们将在特殊的情形，给出它们L^2有界性的证明。

例2 Calderón的m阶交换子

$$C_m(f)(x) = \int_R \left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^m \frac{f(y)}{x-y}\,dy. \qquad (1.5)$$

$m=0$时，这是Hilbert变换。$m=1$时，若记M_A为用函数$A(x)$作乘法的算子，则$C_1(f) = -[M_A, \frac{d}{dx}H]$，其中$H$是Hilbert变换，$[T_1,T_2] = T_1T_2 - T_2T_1$表示$T_1$与$T_2$的交换子。当$m\geqslant 1$为整数，$A' \in L^\infty$时，$C_m(f)$是CZO。

例3 Lipschitz曲线$z = x + i\varphi(x)$ ($\varphi' \in L^\infty(\boldsymbol{R})$)上的Cauchy积分算子

$$C(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(x-y)+i(\varphi(x)-\varphi(y))}\,dy, \qquad (1.6)$$

它是Calderón-Zygmund算子。

例4 区域$\{(x,t)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}: t > A(x)\}$，当$\nabla A(x) \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$时，是典型的Lipschitz区域。它边界上的双层位势算子

$$T(f)(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{R^n} \frac{A(x)-A(y)-(x-y)\nabla A(x)}{(|x-y|^2+(A(x)-A(y))^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y)\,dy \qquad (1.7)$$

是CZO。

为了研究CZO在H^p空间的表现，我们需要定义它在非紧支集函数上的作用。

设T：$\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$连续线性，则可以如下定义其“共轭”算子$T^*$：$\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$：

$$\langle T^*\varphi,\psi\rangle=\langle T\psi,\varphi\rangle$$

对所有$\varphi,\psi\in\mathscr{D}$。假设$\psi\in\mathscr{D}$，$x\notin\operatorname{supp}\psi$，则可以定义

$$\theta(x)=\int_{R^n}K(y,x)\psi(y)\mathrm{d}y.$$

于是当$\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp}\psi=\varnothing$时，有

$$\langle T^*\psi,\varphi\rangle=\int_{R^n}\theta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

从而

$$\theta(x)=T^*(\psi)(x)=\int_{R^n}K(y,x)\psi(y)\mathrm{d}y$$

对一切$x\notin\operatorname{supp}\psi$成立。

现取$y_0\in\operatorname{supp}\psi$。设$d$为$\psi$支集的直径。则当$|x-y_0|\geqslant 2d$，而$y\in\operatorname{supp}\psi$时，如果$T\in\mathrm{CZK}$，那末

$$|K(y,x)-K(y_0,x)|\leqslant C|y-y_0|^\gamma|x-y_0|^{-n-\gamma}.$$

如果进一步还有$\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，则

$$\begin{aligned}|T^*(\psi)(x)|&=\left|\int_{R^n}[K(y,x)-K(y_0,x)]\psi(y)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant C\int_{R^n}|y-y_0|^\gamma|x-y_0|^{-n-\gamma}|\psi(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant Cd^\gamma\|\psi\|_1|x-y_0|^{-n-\gamma}.\end{aligned}$$

于是

$$|T^*(\psi)(x)|\leqslant C|x-y_0|^{-n-\gamma},\tag{1.8}$$

其中C只依赖于ψ与T。

这样，当 f 是 C^∞ 有界函数时，我们可以定义 Tf 作为 $\mathscr{D}_0=\{\psi\in\mathscr{D}:\int_{R^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0\}$的有界线性泛函．事实上，对任意$\psi\in\mathscr{D}_0$，令 $1=\chi_0+\chi_1$，其中 $\chi_0\in\mathscr{D}$，且 $\chi_0(y)=1$，当$|y-y_0|\leqslant 2d$，此处y_0，d 如上所述．由(1.8)看出，

$$\int_{R^n}f(\ )\chi_1(x)T^*\psi(x)\mathrm{d}x$$

有意义．记

$$\langle T^*\psi,f\chi_1\rangle=\int_{R^n}f(x)\chi_1(x)T^*\psi(x)\mathrm{d}x.$$

再注意到$f\chi_0\in\mathscr{D}$，$\langle T(f\chi_0),\psi\rangle$有意义．这样，便有

定义1.3 设$f\in C^\infty$且有界，$T\in$CZK．则对任意$\psi\in\mathscr{D}_0$，任取 $y_0\in\operatorname{supp}\psi$，$d$ 为 $\operatorname{supp}\psi$ 的直径，任取 χ_0 与 χ_1，使得 $\chi_0+\chi_1=1$，且 $\chi_0\in\mathscr{D}$，$\chi_0(y)=1$当$|y-y_0|\leqslant 2d$，$0\leqslant\chi_0\leqslant 1$，我们定义

$$\langle Tf,\psi\rangle=\langle T(f\chi_0),\psi\rangle+\langle T^*\psi,f\chi_1\rangle.$$

为说明上述定义有意义，我们应证明$\langle Tf,\psi\rangle$与 y_0，χ_0，χ_1的选取无关．事实上，若有 $\chi_0,\chi_1,\chi_0',\chi_1'$ 具有上述性质，则由 $1=\chi_0+\chi_1=\chi_0'+\chi_1'$ 知

$$f(\chi_0-\chi_0')=f(\chi_1'-\chi_1).$$

显然它属于$\mathscr{D}$，且在 $\operatorname{supp}\psi$ 等于0．由定义1.2的(ii)，知

$$\begin{aligned}&\langle T(f(\chi_0-\chi_0')),\psi\rangle\\&\quad=\iint_{R^n}K(x,y)f(y)(\chi_0(y)-\chi_0'(y))\psi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&\quad=\langle T(f(\chi_1'-\chi_1)),\psi\rangle,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\langle T(f\chi_0),\psi\rangle+\langle T^*\psi,f\chi_1\rangle\\&\qquad=\langle T(f\chi_0'),\psi\rangle+\langle T^*\psi,f\chi_1'\rangle,\end{aligned}$$

也就是说，$\langle Tf,\psi\rangle$与 y_0,χ_0,χ_1 的选取无关．

作为一种特殊情形，当$T\in\mathrm{CZK}$时，$T(1),T^*(1)$都已经有定义了。上面的推理表明，当$T\in\mathrm{CZO}$时，T在L^∞有定义。

定理1.1 设$T\in\mathrm{CZO}(\gamma)$，则

(1) T是H^p到L^p的有界算子，其中$\frac{n}{n+\gamma}<p\leqslant 1$。

(2) 若$T^*(1)=0$，则T是H^p到H^p的有界算子，其中$\frac{n}{n+\gamma}<p\leqslant 1$。

这里需要说明的是，从T的L^2有界性与(1.8)可知，当$\psi\in\mathscr{D}_0$时，$\int_{R^n}|T(\psi)(x)|\mathrm{d}x<\infty$。这时$\langle T^*1,\psi\rangle=\int_{R^n}T(\psi)(x)\mathrm{d}x$。因此$T^*(1)=0$是指，当$\psi\in\mathscr{D}_0$时，$\int_{R^n}T(\psi)(x)\mathrm{d}x=0$。

证明 (1) 只需证明，对任意的$(p,2,0)$原子a，有$\|T(a)\|_p\leqslant C$，其中C与a无关。

不妨设a的支集是以原点为中心的方体Q。这时

$$\int_{R^n}|T(a)(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{4Q}+\int_{(4Q)^c}=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

对于I，应用Hölder不等式及T的(2,2)型，有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&\leqslant C|Q|^{1-p/2}\left(\int_{4Q}|T(a)(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{p/2}\\&\leqslant C|Q|^{1-p/2}\|a\|_2^p\\&\leqslant C|Q|^{1-p/2}|Q|^{(1/2-1/p)p}=C.\end{aligned}$$

对于II，我们需要得到$x\in(4Q)$时的点估计。利用$a(x)$的消失矩条件，并注意到当$x\in(4Q)^c$，$y\in Q$时，$|x-y|\geqslant\frac{1}{2}|x|$，便得

$$|T(a)(x)|=\left|\int_Q K(x,y)a(y)\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left| \int_Q [K(x,y) - K(x,0)] a(y) \mathrm{d}y \right|$$

$$\leqslant C \int_Q \frac{|y|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}} |a(y)| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant C \frac{|Q|^{\frac{\gamma}{n}}}{|x|^{n+\gamma}} \int_Q |a(y)| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant C \frac{|Q|^{\frac{\gamma}{n}+1-\frac{1}{p}}}{|x|^{n+\gamma}},$$

故

$$\text{II} \leqslant C \int_{(4Q)^c} \frac{|Q|^{p\cdot\frac{\gamma}{n}+p-1}}{|x|^{(n+\gamma)p}} \mathrm{d}x \leqslant C.$$

(2) 只需证明，对每个$(p,2,0)$原子a，$T(a)$是$(p,2,0,\varepsilon)$分子，其中$\frac{1}{p}-1<\varepsilon<\frac{\gamma}{n}$，且其分子范数一致有界．事实上，$T(a)$的消失矩条件可由$T^*(1)=0$推出．下面验证其大小条件．注意此时

$$a = 1 - \frac{1}{p} + \varepsilon, \quad b = 1 - \frac{1}{2} + \varepsilon = \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

不妨设a的支集是以原点为中心的方体Q，则

$$\|T(a)\|_2 \leqslant C \|a\|_2 \leqslant C |Q|^{1/2-1/p},$$

$$\| |x|^{nb} T(a)(x) \|_2^2 = \int |T(a)(x)|^2 |x|^{2nb} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{4Q} + \int_{(4Q)^c} = \text{I} + \text{II},$$

其中

$$\text{I} \leqslant C |Q|^{2b} \|T(a)\|_2^2 \leqslant C |Q|^{2b} |Q|^{1-\frac{2}{p}}$$

$$= C |Q|^{2+2\varepsilon-\frac{2}{p}}.$$

对于Ⅱ，应用(1)中得到的点估计，有

$$
\begin{aligned}
\text{Ⅱ} &\leqslant C\int_{(4Q)^c}\frac{|Q|^{\frac{2\gamma}{n}+2-\frac{2}{p}}}{|x|^{2(n+\gamma)}}|x|^{n+2n\varepsilon}dx \\
&\leqslant C|Q|^{\frac{2\gamma}{n}+2-\frac{2}{p}}|Q|^{2\varepsilon-\frac{2\gamma}{n}} \\
&= C|Q|^{2+2\varepsilon-\frac{2}{p}}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\|T(a)\|_2^{a/b}\,\||\cdot|^{nb}T(a)(\cdot)\|_2^{1-a/b} \\
&\leqslant C|Q|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\frac{a}{b}}|Q|^{(1+\varepsilon-\frac{1}{p})(1-\frac{a}{b})} \\
&= C.
\end{aligned}
$$

注意到 $T\in \mathrm{CZO}(\gamma)$，则 $T^*\in \mathrm{CZO}(\gamma)$，故 T^* 是 H^1 到 L^1 有界的，从而 T 是 L^∞ 到 BMO 有界的。于是有

推论1.1 若 $T\in \mathrm{CZO}$，则 T 是 L^∞ 到 BMO 有界的。

利用 § 8.1 H^p 空间的算子内插定理，便得推论1.2。

推论1.2 若 $T\in \mathrm{CZO}$，则 T 是 L^p 到 L^p 有界的，$1<p<\infty$。

现在看本节提供的几个例子，只要证明了它们是 L^2 有界的，则它们都是 $L^p\to L^p(1<p<\infty)$，$H^1\to L^1$，$L^\infty\to$BMO 有界的。特别地，当 $b\in$ BMO 时，仿积 Π_b 在这些空间有界。顺便指出，Π_b 还满足 $\Pi_b(1)=b,\Pi_b^*(1)=0$。

为了研究 Calderón–Zygmund 算子在其它 H^p 空间的有界性，需要它的核有更强的光滑性以及高阶的消失矩条件。为此我们引入下面的定义。

定义1.4 我们称算子 T：$\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 属于 CZK(N,γ)，其中 N 是非负整数，$0<\gamma\leqslant 1$，如果 T 的核 $K(x,y)$ 在 $\Omega=\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\backslash\{x=y\}$ 上是 N 阶连续可微函数，满足当 $0\leqslant|\alpha|\leqslant N$ 时，

$$
|\partial_1^\alpha K(x,y)|+|\partial_2^\alpha K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n-|\alpha|}, \tag{1.9}
$$

当 $|\alpha|=N$，$|x-y|>2|y-y'|$ 时，

$$|\partial_2^\alpha K(x,y)-\partial_2^\alpha K(x,y')|\leqslant C|y-y'|^\gamma|x-y|^{-n-N-\gamma};\tag{1.10}$$

当$|\alpha|=N$，$|x-y|\geqslant 2|x-x'|$时，

$$|\partial_1^\alpha K(x,y)-\partial_1^\alpha K(x',y)|\leqslant C|x-x'|^\gamma|x-y|^{-n-N-\gamma},\tag{1.11}$$

其中∂_1,∂_2分别表示对x与y求偏导数。并且，还有

$$T(f)(x)=\int_{R^n}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

对$x\in(\mathrm{supp}f)^c$成立。

设$T\in \mathrm{CZK}(N,\gamma)$，下面定义它在多项式上的作用。记

$$\mathscr{D}_N=\left\{\psi\in\mathscr{D}:\ \int x^\alpha\psi(x)\,\mathrm{d}x=0,\ \text{当}0\leqslant|\alpha|\leqslant N\right\}.$$

对任意$\psi\in\mathscr{D}_N$，取$y_0\in\mathrm{supp}\psi$，d为$\mathrm{supp}\psi$的直径。对任意满足$|x-y_0|\geqslant 2d$的x，有

$$T^*(\psi)(x)=\int_{R^n}K(y,x)\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{R^n}[K(y,x)-P(y_0,x)]\psi(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中$P(y_0,x)$是$K(y,x)$作为y的函数在y_0处的N阶 Taylor 多项式。注意到$|y-y_0|\leqslant d\leqslant|x-y_0|/2$，知

$$|T^*(\psi)(x)|\leqslant C\int_{R^n}\frac{|y-y_0|^N}{|x-y_0|^{n+\gamma+N}}|\psi(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{C(T,\psi)}{|x-y_0|^{n+\gamma+N}}.$$

如前定义χ_0与χ_1，则由上面的估计知$\int_{R^n}x^\alpha\chi_1(x)T^*\psi(x)\,\mathrm{d}x$有意义，记之为

$$\langle T^*\psi, x^\alpha\chi_1\rangle = \int_{R^n} x^\alpha \chi_1(x) T^*(\psi)(x)\,\mathrm{d}x.$$

而 $x^\alpha\chi_0 \in \mathscr{D}$，$\langle T(x^\alpha\chi_0), \psi\rangle$有意义。于是我们有下面的定义。

定义1.5 设 g 是一次数不超过N的多项式，$T\in \mathrm{CZK}(N,\gamma)$，对任意 $\psi\in\mathscr{D}_N$，取 $y_0\in\mathrm{supp}\psi$，d 为 $\mathrm{supp}\psi$ 的直径，取 $\chi_0+\chi_1=1$，其中 $\chi_0\in\mathscr{D}$，且 $\chi_0(y)=1$当$|y-y_0|\leqslant 2d$，$0\leqslant\chi_0\leqslant 1$。我们定义

$$\langle Tg, \psi\rangle = \langle T(g\chi_0), \psi\rangle + \langle T^*\psi, g\chi_1\rangle.$$

类似于定义1.3后面的说明，上述定义与 y_0,χ_0,χ_1 的选取无关。特别地，当 $T\in\mathrm{CZK}(N,\varepsilon)$时，$T(x^\alpha)$有定义，其中 $0\leqslant|\alpha|\leqslant N$。同理 $T^*(x^\alpha)$也有定义。

定理1.2 设 $T\in\mathrm{CZK}(N,\gamma)\cap\mathrm{CZO}$，则

(1) T是H^p到L^p的有界算子，其中$\frac{n}{n+N+\gamma}<p\leqslant 1$；

(2) 若 $T^*(x^\alpha)=0$ 当$0\leqslant|\alpha|\leqslant N$，则$T$是$H^p$到$H^p$的有界算子，其中$\frac{n}{n+N+\gamma}<p\leqslant 1$。

证明 (1) 根据第五章的结论，只需证明，对任意的$(p,2,N)$原子 a，有$\|Ta\|_p\leqslant C$，其中C是与a无关的常数。不妨设a的支集是以原点为中心的方体Q。与前面的证明一样，

$$\int_{4Q}|T(a)(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C|Q|^{1-\frac{p}{2}}\|Ta\|_2^p$$

$$\leqslant C|Q|^{1-\frac{p}{2}}\|a\|_2^p\leqslant C.$$

为估计在$(4Q)^c$上的积分，设 $x\notin 4Q$，则

$$T(a)(x)=\int_Q K(x,y)a(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_Q(K(x,y)-P(x,y))a(y)\mathrm{d}y,$$

其中$P(x,y)$是$K(x,y)$作为y的函数在$y=0$的$N-1$阶 Taylor 多项式。因此

$$T(a)(x)=\int_Q\sum_{|\alpha|=N}C_{N\alpha}\frac{\partial^\alpha K(x,\xi)}{\partial y^\alpha}y^\alpha a(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_Q\sum_{|\alpha|=N}C_{N\alpha}\left(\frac{\partial^\alpha K(x,\xi)}{\partial y^\alpha}-\frac{\partial^\alpha K(x,0)}{\partial y^\alpha}\right)y^\alpha a(y)\mathrm{d}y,$$

其中ξ是y与0联线上的某一点。这里我们用到$a(y)$有N阶消失矩。故

$$|T(a)(x)|\leqslant C\int_Q\frac{|y|^{N+\gamma}|a(y)|}{|x|^{n+N+\gamma}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\frac{|Q|^{\frac{N}{n}+1-\frac{1}{p}+\frac{\gamma}{n}}}{|x|^{n+N+\gamma}}.$$

于是

$$\int_{(4Q)^c}|T(a)(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_{(4Q)^c}\frac{|Q|^{\frac{N}{n}p+p-1+\frac{p\gamma}{n}}}{|x|^{p(n+N+\gamma)}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C,$$

这就证明了$\|T(a)\|_p\leqslant C$。

(2) 我们只需证明，对每个$(p,2,N)$原子，$T(a)$是$(p,2,N,\varepsilon)$分子，且其分子范数被一与分子无关的常数控制，其中ε满足$\frac{n+\gamma}{n}>\varepsilon>\frac{1}{p}-1$，它的存在性是由于已知$p>\frac{n}{n+N+\gamma}$。

不妨设a的支集是以原点为中心的方体Q。由条件$T^*(x^\alpha)=0$，当$0\leqslant|\alpha|\leqslant N$，知$Ta$满足分子的消失矩条件。剩下来只需验证$Ta$满足分子的大小条件。注意，此时$a=1-\frac{1}{p}+\varepsilon$，

$b=\frac{1}{2}+\varepsilon$. 类似于定理1.1的证明，有

$$\|T(a)\|_2\leqslant C\|a\|_2\leqslant C|Q|^{1/2-1/p},$$

$$\||x|^{nb}T(a)(x)\|_2^2=\int_{R^n}|x|^{2nb}|T(a)(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{(4Q)}+\int_{(4Q)^c}=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

其中

$$\mathrm{I}\leqslant C|Q|^{2+2\varepsilon-2/p}.$$

对于Ⅱ，应用上面(1)中得到的逐点估计，有

$$\mathrm{II}\leqslant C\int_{(4Q)^c}\frac{|Q|^{\frac{2N}{n}+2-\frac{2}{p}+\frac{2\gamma}{n}}}{|x|^{2(n+N+\gamma)}}|x|^{n+2n\varepsilon}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C|Q|^{2+2\varepsilon-2/p}.$$

因此

$$\||x|^{nb}T(a)(x)\|_2\leqslant C|Q|^{1+\varepsilon-1/p}.$$

于是

$$\|T(a)\|_2^{a/b}\||x|^{nb}T(a)(x)\|_2^{1-a/b}\leqslant C.$$

定理1.2证完。

§10.2 $T(1)$ 定 理

按定义，Calderón–Zygmund 算子除了要求它的核满足一定的大小条件与光滑条件之外，还要求它是 L^2 有界的。前面的推理表明，要研究这种算子在其它空间的有界性，L^2 有界性是十分重要的前提。自然要问，对带有标准核的算子，是否存在一个简单的 L^2 有界性判别准则？要知道，大多数 Calderón–Zygmund 算子不是卷积型的，因此，Plancherel 定理不能直接应用，需要寻找另外的途径。1983年，G.David 与 J.-L.Journé 首次给出了这样的准则，这就是著名的 $T(1)$定理。本节将叙述这个定理，

并给出一个与原子分解思想紧密相关的证明。

首先我们需要定义弱有界性质。

定义2.1 设 $T: \mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 线性连续。称 T 具有弱有界性质，如果对任意 $\varphi,\psi\in\mathscr{D}$，$\varphi,\psi$ 支集的直径不超过 t，有

$$|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant Ct^n(\|\varphi\|_\infty+t\|\nabla\varphi\|_\infty)(\|\psi\|_\infty+t\|\nabla\psi\|_\infty),$$

其中常数 C 与 φ,ψ 无关。

T 具有弱有界性质，简记为 $T\in\mathrm{WBP}$。

显然，若 T 是 L^2 上的有界算子，则 $T\in\mathrm{WBP}$。事实上，这时

$$\begin{aligned}|\langle T\varphi,\psi\rangle|&\leqslant\|T\varphi\|_2\|\psi\|_2\leqslant\|T\|\|\varphi\|_2\|\psi\|_2\\&\leqslant\|T\|t^n\|\varphi\|_\infty\|\psi\|_\infty\\&\leqslant\|T\|t^n(\|\varphi\|_\infty+t\|\nabla\varphi\|_\infty)\\&\quad\times(\|\psi\|_\infty+t\|\nabla\psi\|_\infty).\end{aligned}$$

由 §10.1定理1.1知，若 T 具有标准核，且在 L^2 有界，则 T 是 L^∞ 到 BMO 的有界算子。特别地 $T(1)\in\mathrm{BMO}$。由于 T^* 具有相同性质的核且在 L^2 也有界，故 $T^*(1)\in\mathrm{BMO}$。

下面的定理说明，上面三个 L^2 有界的必要条件，合起来便构成了充分条件。

***T*(1) 定理**(G.David–J.L.Journé) 设 $T\in\mathrm{CZK}(\gamma)$，则 T 是 L^2 有界（从而 $T\in\mathrm{CZO}$）的充分必要条件是 $T\in\mathrm{WBP}$，$T(1)\in\mathrm{BMO}$，$T^*(1)\in\mathrm{BMO}$。

显然，我们已经证明了其必要性。下面证明其充分性。我们不妨假设 $T(1)=T^*(1)=0$。事实上，对于一般的情形，设 $T(1)=b_1\in\mathrm{BMO}$，$T^*(1)=b_2\in\mathrm{BMO}$。考虑算子

$$T_0=T-\Pi_{b_1}-\Pi_{b_2}^*,$$

其中 Π_{b_1}，Π_{b_2} 分别是由 BMO 函数 b_1,b_2 生成的仿积算子。根据 §10.1的结果，$\Pi_{b_1}(1)=b_1$，$\Pi_{b_1}^*(1)=0$，$\Pi_{b_2}^*(1)=0$，$\Pi_{b_2}^{**}(1)=b_2$，知 $T_0(1)=T_0^*(1)=0$。而由 $\Pi_{b_1}\in\mathrm{CZK}(1)$，$\Pi_{b_2}\in\mathrm{CZK}(1)$，知 $T_0\in\mathrm{CZK}(\gamma)$。故 T_0 是 L^2 有界的。§10.1 我们已证明过，

当 $b_1\in\mathrm{BMO}$，$b_2\in\mathrm{BMO}$ 时，Π_{b_1} 与 $\Pi_{b_2}^*$ 是 L^2 有界的，故 $T=T_0+\Pi_{b_1}+\Pi_{b_2}^*$ 是 L^2 有界的。

现在，设 $T\in\mathrm{CZK}(\gamma)\cap\mathrm{WBP}$，$T(1)=T^*(1)=0$，我们来证明 T 是 L^2 有界的（即可扩张为在 L^2 上有界的算子）。

我们首先需要 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Haar 函数系 $\{h_Q^\varepsilon\}$，其中 Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的二进方体，$\varepsilon\in J=\{0,1,\cdots,2^n-1\}$。设 Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的第 k 代二进方体，即 $l(Q)=2^{-k}$，$k\in\boldsymbol{Z}$。Q_η 是对 Q 进行 2^n 等分所得到的 $k+1$ 代二进方体。对每个固定的 Q，$h_Q^\varepsilon(x)$ 可以这样定义，它在 Q 的外面取值为 0，在每个 Q_η 上取值为 C_Q 或 $-C_Q$，使得

$$\int_Q h_Q^\varepsilon(x)h_Q^{\varepsilon'}(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{\varepsilon\varepsilon'},$$

其中 $\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$ 是 Kronecker 符号，也就是说，$h_Q^\varepsilon(\varepsilon\in J)$ 构成了全体在 Q 外取值为 0 而在 Q_η 取常数值的函数的 L^2 空间的一组标准正交基。很容易通过线性代数的知识证明这样的 h_Q^ε 是存在的。显然，$C_Q=|Q|^{-1/2}=2^{kn/2}$。

我们看 $n=2$ 时的简单例子。设 $Q=I\times I$，例如 $I=[0,1]$。记 $\varphi(u)=\chi_I(u)$ 为 I 的特征函数，

$$\psi(u)=\begin{cases}-1, & \text{当}\ 0<u\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2mm] 1, & \text{当}\ \dfrac{1}{2}<u\leqslant 1,\\[2mm] 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则这时 $h_Q^\varepsilon(x)\ (\varepsilon=0,1,2,3)$ 由下列函数组成：

$$h^0(x_1,x_2)=\varphi(x_1)\varphi(x_2),$$
$$h^1(x_1,x_2)=\varphi(x_1)\psi(x_2),$$
$$h^2(x_1,x_2)=\psi(x_1)\varphi(x_2),$$
$$h^3(x_1,x_2)=\psi(x_1)\psi(x_2).$$

全体 $\{h_Q^\varepsilon\}$ 组成了 Haar 函数系，其中 $\varepsilon\in J$，Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的全体二进方体。显然有

引理2.1 对任意 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$f(x)=\sum_{Q}\sum_{\varepsilon}\langle f,h_Q^\varepsilon\rangle h_Q^\varepsilon(x),$$

并且

$$\|f\|_2^2=\sum_{Q}\sum_{\varepsilon}|\langle f,h_Q^\varepsilon\rangle|^2。$$

这引理表明，Haar 函数系构成了 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$的一组完备的标准正交基。我们下面的做法是在定理假设的条件下，估计算子在 Haar 基上作用的矩阵

$$C_{QR}^{\varepsilon\varepsilon'}=\langle Th_Q^\varepsilon,\ h_R^{\varepsilon'}\rangle,$$

从而证明 T 是 L^2 有界的。

引理2.2 设 Q 是中心为 x_Q 的二进方体，$\operatorname{supp}h(x)\subset Q$，$\int_Q h(x)\mathrm{d}x=0$，则当 $x\notin 2Q$ 时，有

$$|T(h)(x)|\leqslant\frac{C|Q|^{1+\gamma/n}}{|x-x_Q|^{n+\gamma}}\|h\|_\infty.$$

特别地，取 $h=h_Q^\varepsilon$，便有

$$|T(h_Q^\varepsilon)(x)|\leqslant C|Q|^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{n}}|x-x_Q|^{-n-\gamma}.\tag{2.1}$$

证明 这是由于

$$|T(h)(x)|=\left|\int_Q[K(x,y)-K(x,x_Q)]h(y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant C\|h\|_\infty\frac{|Q|^{\gamma/n}}{|x-x_Q|^{n+\gamma}}\int_Q\mathrm{d}y.$$

引理2.3 记 $C_{QR}=C_{QR}^{\varepsilon\varepsilon'}=\langle Th_Q^\varepsilon,h_R^{\varepsilon'}\rangle$，则

(1) 当 $|Q|\leqslant|R|$ 时，

$$|C_{QR}|\leqslant C\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{1/2}\frac{|Q|^{\gamma/n}}{|Q|^{\gamma/n}+\operatorname{dist}(Q,\bigcup_\eta\partial R_\eta)^\gamma},$$

(2) 当$|Q|\leqslant|R|$且$\operatorname{dist}(Q,R)\geqslant|R|^{\frac{1}{n}}$时，

$$|C_{QR}|\leqslant C|Q|^{\frac{1}{2}}|R|^{\frac{1}{2}}\frac{|Q|^{\gamma/n}}{\operatorname{dist}(Q,R)^{n+\gamma}};$$

(3) 当$|Q|\geqslant|R|$时，

$$|C_{QR}|\leqslant C\left(\frac{|R|}{|Q|}\right)^{1/2}\frac{|R|^{\gamma/n}}{\left(|R|^{\gamma/n}+\operatorname{dist}\left(R,\bigcup_{\eta}\partial Q_{\eta}\right)\right)^{\gamma}};$$

(4) 当$|Q|\geqslant|R|$且$\operatorname{dist}(Q,R)\geqslant|Q|^{\frac{1}{n}}$时，

$$|C_{QR}|\leqslant C|Q|^{\frac{1}{2}}|R|^{\frac{1}{2}}\frac{|R|^{\gamma/n}}{\operatorname{dist}(Q,R)^{n+\gamma}},$$

其中∂Q_{η}表示Q_{η}的边界。

证明 由T与T^*满足相同的假设，显然，由(1)，(2)可推出(3)，(4)。故只需证明(1)，(2)。分几种情形来讨论。

情形1 $|Q|\leqslant|R|$，$Q\not\subset R$，$\operatorname{dist}(Q,R)\geqslant|Q|^{1/n}$。这时可以用引理2.2，有

$$\begin{aligned}|C_{QR}|&\leqslant C\int_{R^n}\frac{|Q|^{1/2+\gamma/n}}{|x-x_Q|^{n+\gamma}}|h_R(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant C|Q|^{1/2+\gamma/n}|R|^{-1/2}\operatorname{dist}(Q,R)^{-\gamma}\\&\leqslant C\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{1/2}\frac{|Q|^{\gamma/n}}{\operatorname{dist}(Q,R)^{\gamma}},\end{aligned}$$

这就是(1)。类似地

$$\begin{aligned}|C_{QR}|&\leqslant C\int_{R^n}\frac{|Q|^{1/2+\gamma/n}}{|x-x_Q|^{n+\gamma}}|h_R(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant C|Q|^{1/2+\gamma/n}|R|^{1/2}\operatorname{dist}(Q,R)^{-n-\gamma},\end{aligned}$$

这就是(2)。

情形2 $|Q|\leqslant|R|$，$Q\not\subset R$，$\operatorname{dist}(Q,R)\leqslant|Q|^{1/n}$。分解$h_R=h_1+h_2$，其中$\operatorname{supp}h_1\subset 3Q$，而当$x\in 2Q$时$h_2(x)=0$，且

$\|h_1\|_\infty \leqslant \|h_R\|_\infty$, $\|h_2\|_\infty \leqslant \|h_R\|_\infty$. 这时，用情形(1)的方法容易得到

$$|\langle Th_Q, h_2\rangle| \leqslant C\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{1/2}.$$

而

$$|\langle Th_Q, h_1\rangle| = \left|\iint_{R^n} K(x,y)h_Q(y)h_1(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant C|Q|^{-\frac{1}{2}}|R|^{-\frac{1}{2}}\iint_{R^n}\frac{\chi_Q(y)\chi_{3Q\setminus Q}(x)}{|x-y|^n}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{1/2},$$

于是(1)成立.

情形 3　$|Q|\leqslant|R|$, $Q\subsetneqq R$. 这时，存在 $R_\eta\subsetneqq R$, 使得 $Q\subset R_\eta$. 注意 h_R 在 R_η 为常数 C，而 $T^*(1)=0$，故

$$\langle Th_Q, h_R\rangle = \langle Th_Q, h_R - C\rangle,$$

从而

$$|C_{QR}|\leqslant\left(\int_{R_\eta^c\cap(2Q)}+\int_{R_\eta^c\cap(2Q)^c}\right)|T(h_Q)(x)||h_R(x)-C|\mathrm{d}x$$

$$= \text{I} + \text{II},$$

其中

$$\text{II}\leqslant C\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{\frac{1}{2}}|Q|^{\frac{\gamma}{n}}\int_{R_\eta^c\cap(2Q)^c}\frac{\mathrm{d}x}{|x-x_Q|^{n+\gamma}}$$

$$\leqslant C\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{1/2}\frac{|Q|^{\gamma/n}}{(|Q|^{1/n}+\mathrm{dist}(Q,R_\eta^c))^\gamma},$$

而当 $\mathrm{dist}(Q,R_\eta^c)>10\sqrt{n}|Q|^{1/n}$ 时，I 的值为 0，而当 $\mathrm{dist}(Q,R_\eta^c)\leqslant 10\sqrt{n}|Q|^{1/n}$ 时，

$$\text{I}\leqslant C|Q|^{-1/2}|R|^{-1/2}\iint_{R^n}\chi_Q(y)\chi_{R_\eta^c\cap 2Q\cap Q^c}(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{1/2},$$

由此便得到(1)．

现在除了唯一的困难情形 $Q=R$ 以外，引理 2.3 已经证完．对于 $Q=R$ 的情形，要用 T 的弱有界性．我们把它写成

引理2.4 $|\langle Th_Q,h_Q\rangle|\leqslant C$．

证明 由于

$$h_Q(x)=\sum_\eta C_\eta\chi_{Q_\eta},$$

其中 $C_\eta=\pm|Q|^{-1/2}$，而容易证得，当 $\eta\neq\eta'$ 时，

$$|\langle T\chi_{Q_\eta},\chi_{Q_{\eta'}}\rangle|\leqslant C|Q_\eta|,$$

故只要证明

$$|\langle T\chi_{Q_\eta},\chi_{Q_\eta}\rangle|\leqslant C|Q_\eta|$$

便够了．为简单起见，我们省去下标 η，即只要证明

$$|\langle T\chi_Q,\chi_Q\rangle|\leqslant C|Q|.$$

取 $\varphi\in C^\infty$，$\operatorname{supp}\varphi\subset 2Q$，当 $x\in Q$ 时 $\varphi(x)=1$。由于

$$|\langle T\chi_Q,\chi_Q-\varphi\rangle|\leqslant C\int_Q\int_{2Q\setminus Q}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^n}\leqslant C|Q|,$$

故只需证明

$$|\langle T\chi_Q,\varphi\rangle|\leqslant C|Q|.$$

取 $\phi\in C^\infty$，$\operatorname{supp}\phi\subset B(0,r)$，$r=|Q|^{1/n}$，$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\mathrm{d}x=1$，且对一切 n 重指标 α

$$|\partial^\alpha\phi|\leqslant Cr^{-n-|\alpha|}$$

成立．记

$$\chi_Q=\sum_{m=0}^\infty f_m,$$

其中

$$f_0=\chi_Q*\phi,$$

$$f_m = \chi_Q * (2^{nm} \ \phi(2^m x) - 2^{n(m-1)} \ \phi(2^{m-1}x))$$
$$= \chi_Q * \psi_m.$$

这里$\int_{R^n}\psi_m(x)\mathrm{d}x = 0$，$\mathrm{supp}\psi_m = B(0, 2^{-m+1}r)$。现在通过一个单位分解把 f_m 分解为一些函数的和，它们每个支于半径为 $2^{-m}r$ 的球上，即

$$f_m = \sum_{k \in I(m)} g_{m,k}, \qquad (2.2)$$

其中 $g_{m,k}$ 支于半径为 $2^{-m}r$ 的球上，且对一切 n 重指标 α，满足

$$|\partial^\alpha g_{m,k}| \leqslant C_\alpha (2^{-m}r)^{-|\alpha|}.$$

由于当 $\mathrm{dist}(x, Q) \geqslant C2^{-m}r$ 时，有 $f_m(x) = 0$，其中 C 是某个常数，知我们可取分解(2.2)中的 $I(m) \leqslant C2^{(n-1)m}$。

现在对每个固定的 m, k，我们来估计$\langle Tg_{m,k}, \varphi\rangle$。分解 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$，其中 $\mathrm{supp}\varphi_1 \subset B(x_1, 2^{-m}10r)$，$x_1 \in \mathrm{supp}g_{m,k}$，而当 $x \in B(x_1, 2^{-m}5r)$ 时 $\varphi_2(x) = 0$。同时还可以使

$$|\partial^\alpha \varphi_1| \leqslant C(2^{-m}r)^{-|\alpha|}.$$

由弱有界性，得

$$|\langle Tg_{m,k}, \varphi_1\rangle| \leqslant C2^{-mn} r^n.$$

而

$$|\langle Tg_{m,k}, \varphi_2\rangle| \leqslant C \iint_{B \times (10B \setminus (2B))} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{|x-y|^{-n}} \leqslant C2^{-mn} r^n,$$

其中 B 是 $g_{m,k}$ 所支于的半径为 $2^{-m}r$ 的球。结果

$$|\langle Tg_{m,k}, \varphi\rangle| \leqslant C2^{-mn} r^n,$$

从而

$$|\langle T\chi_Q, \varphi\rangle| \leqslant C\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \in I(m)} 2^{-mn} r^n$$

$$\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \cdot r^n = Cr^n,$$

引理2.4得证。

引理2.5　设二进方体Q的边长为r，则

(1) $$\sum_{l(R)=2^j r}|C_{QR}|\leqslant C2^{-nj/2},\quad \text{当} j\geqslant 0;$$

(2) $$\sum_{l(R)=2^j r}|C_{QR}|\leqslant C2^{-nj/2}2^{\gamma j},\quad \text{当} j<0,\ \gamma\neq 1;$$

$$\sum_{l(R)=2^j r}|C_{QR}|\leqslant C(-j)2^{-nj/2}2^{j},\quad \text{当} j<0,\ \gamma=1.$$

类似的估计对$\sum_R|C_{RQ}|$成立。

证明　(1) 这时$|R|\geqslant|Q|$。首先，只有有限个R，满足$l(R)=2^j r$，$\mathrm{dist}(Q,R)\leqslant|R|^{\frac{1}{n}}$。用引理2.3的(1)，便得到

$$\sum_{\substack{l(R)=2^j r\\ \mathrm{dist}(Q,R)\leqslant l(R)}}|C_{QR}|\leqslant C\sum\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{1/2}\leqslant C2^{-nj/2}.$$

其次，考虑R：$l(R)=2^j r$，$\mathrm{dist}(Q,R)\geqslant|R|^{1/n}$。用引理2.3的(2)，便得

$$\sum_{\substack{l(R)=2^j r\\ \mathrm{dist}(Q,R)\geqslant l(R)}}|C_{QR}|$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^k l(R)\leqslant\mathrm{dist}(Q,R)<2^{k+1}l(R)}\frac{|Q|^{1/2}|R|^{1/2}|Q|^{\gamma/n}}{\mathrm{dist}(Q,R)^{n+\gamma}}$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-jn/2}2^{-j\gamma}2^{-k\gamma}\leqslant C2^{-nj/2}.$$

(2) 这时$j<0$，即$|Q|>|R|$。当$\mathrm{dist}(Q,R)\geqslant r$时，包含在$2^k r\leqslant\mathrm{dist}(Q,R)\leqslant 2^{k+1}r$中的$R$的数目不超过$C2^{nk}\frac{|Q|}{|R|}$，因此，用引理2.3的(4)，有

$$\sum_{\substack{l(R)=2^j r\\ \operatorname{dist}(Q,R)\geqslant r}} |C_{QR}| \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k r<\operatorname{dist}(Q,R)<2^{k+1}r} \frac{|Q|^{\frac{1}{2}}|R|^{\frac{1}{2}}|R|^{\frac{\gamma}{n}}}{\operatorname{dist}(Q,R)^{n+\gamma}}$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{j\gamma}2^{-\frac{nj}{2}}}{2^{k\gamma}} = C2^{-\frac{nj}{2}}2^{\gamma j}.$$

现在考虑 $\operatorname{dist}(Q;R)<r$ 的 R。先估计满足 $2^k 2^j r<\operatorname{dist}\left(\bigcup_\eta Q_\eta, R\right)\leqslant 2^{k+1}2^j r$ 的 R 有多少？这时的体积不超过 $Cr^{n-1}2^{k+1}2^j r$ （"面积" 乘 "长度"）。因此 R 的数目不超过

$$Cr^{n-1}2^{k+1}2^j r\cdot(2^j r)^{-n}\leqslant C2^{-nj}2^j 2^{k+1}.$$

用引理2.3的(3)，有

$$\sum_{\substack{l(R)=2^j r\\ \operatorname{dist}(Q,R)\leqslant r}} |C_{QR}|$$

$$\leqslant C\sum_{k\leqslant-(j+1)} \sum_{2^{k+j}r<\operatorname{dist}(\cup Q_\eta,R)\leqslant 2^{k+j+1}r} \left(\frac{|R|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \frac{|R|^{\frac{\gamma}{n}}}{|R|^{\frac{\gamma}{n}}+\operatorname{dist}(R,\bigcup Q_\eta)^\gamma}$$

$$\leqslant C\sum_{k\leqslant-(j+1)} 2^{-nj/2}2^j 2^{k(1-\gamma)}$$

$$\leqslant\begin{cases} C2^{-nj/2}2^{\gamma j}, & \text{当 } \gamma<1,\\ Cj2^{-nj/2}2^j, & \text{当 } \gamma=1. \end{cases}$$

引理2.5证完.

引理2.6 对每个 (Q,ε)，令 $\omega(Q,\varepsilon)=|Q|^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2n}}$，则对每个 (Q,ε)，有

$$\sum_{Q',\varepsilon'} |C_{QQ'}^{\varepsilon\varepsilon'}|\omega(Q',\varepsilon')\leqslant C\omega(Q,\varepsilon);$$

$$\sum_{Q',\varepsilon'} |C_{Q'Q}^{\varepsilon'\varepsilon}|\omega(Q',\varepsilon')\leqslant C\omega(Q,\varepsilon).$$

证明 利用引理2.5，

$$\sum_{Q',\varepsilon'}|C_{QQ'}^{\varepsilon\varepsilon'}|\omega(Q',\varepsilon')$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|Q'|=2^{nj}|Q|}+\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{|Q'|=2^{nj}|Q|}$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

其中

$$\mathrm{I}\leqslant C\sum_{j\geqslant 0}2^{-nj/2}(|Q|\,2^{nj})^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2n}}$$

$$\leqslant C\sum_{j\geqslant 0}2^{-j\gamma/2}\,\omega(Q,\varepsilon),$$

$$\mathrm{II}\leqslant C\sum_{j<0}2^{-nj/2}\,2^{\gamma j}(-j)(|Q|2^{nj})^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2n}}$$

$$\leqslant C\sum_{j<0}(-j)2^{\delta j/2}\,\omega(Q,\varepsilon)=C\omega(Q,\varepsilon).$$

引理2.7(Schur) 在引理2.6的结论成立时，T 是 L^2 的有界算子，其中 $C_{QQ'}^{\varepsilon\varepsilon'}=\langle Th_Q^{\varepsilon},h_{Q'}^{\varepsilon'}\rangle$。

证明 用 i 代替指标(Q,ε)，j 代替(Q',ε')。给定$\{x_i\}$，定义

$$y_i=\sum_j C_{ij}x_i.$$

用 Schwarz 不等式

$$|y_i|^2\leqslant\sum_j|C_{ij}|^{\frac{1}{2}}\,\omega_j^{\frac{1}{2}}\,\omega_j^{-\frac{1}{2}}\,|C_{ij}|^{\frac{1}{2}}|x_j|$$

$$\leqslant\Big(\sum_j|C_{ij}|\omega_j\Big)\Big(\sum_j|C_{ij}|\omega_j^{-1}|x_j|^2\Big)$$

$$\leqslant C\omega_i\Big(\sum_j|C_{ij}|\omega_j^{-1}|x_j|^2\Big).$$

故

$$\|y\|^2=\sum_i |y_i|^2 \leqslant C\sum_j \sum_i \omega_i |C_{ij}|\omega_j^{-1}|x_j|^2$$

$$\leqslant C\sum_j \omega_j\omega_j^{-1}|x_j|^2 \leqslant C\|x\|^2.$$

根据引理2.1，便得到T是L^2有界的。$T(1)$定理至此证完.

在观察一些例子之前，我们对 WBP 作一点说明。如果$T\in$ CZK(γ)，而T的核K又是反对称的，即$K(x,y)=-K(y,x)$，那末$T\in$ WBP。这是因为，若$\varphi,\psi\in\mathscr{D}$，它们支集的直径不超过$t$，则

$$|\langle T\varphi,\psi\rangle|=\frac{1}{2}\left|\iint_{R^{2n}}K(x,y)[\varphi(y)\psi(x)-\varphi(x)\psi(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant C\|\varphi\|_\infty t^n\int_{R^n}\frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y$$

$$+C\|\psi\|_\infty t^n\int_{R^n}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant Ct^n(\|\varphi\|_\infty+t\|\nabla\varphi\|_\infty)(\|\psi\|_\infty+t\|\nabla\psi\|_\infty).$$

现在看几个重要的例子。先看§10.1中的 Calderón 交换子(1.5)。当$m=0$时，它是 Hilbert 变换

$$C_0(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_R\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y.$$

已知C_0是L^2有界的(从$T(1)$定理看则显然，因为$C_0(1)=C_0^*(1)=0$，而C_0的核是反对称的)，从而它是$H^1\to L^1$，$L^\infty\to$BMO有界的。现在考虑C_1。通过分部积分便有

$$C_1(1)=C_0(A').$$

$A'\in L^\infty$，故$C_1(1)=C_0(A')\in$ BMO。显然也有$C_1^*(1)\in$ BMO。而C_1的核也是反对称的，即$C_1\in$ WBP。故C_1是L^2有界的，从而是$H^1\to L^1$，$L^\infty\to$BMO有界。通过归纳法，便可把$C_n(1)$归结

为 $C_{n-1}(A')$，即

$$C_m(1)=A_m C_{m-1}(A'),$$

其中 A_m 是只依赖于 m 的常数。因此知当 $A'\in L^\infty$ 时，C_m 是 L^2 有界的，即 $C_m\in \mathrm{CZO}$。

考虑 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子(1.6)。通过幂级数展开，得到

$$C(f)(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^m\int_R\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right)^m\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^m C_m(f)(x),$$

其中 $C_m(f)$ 是 Calderón 的 m 阶交换子。仔细验证上例关于 Calderón 交换子有界性的证明，便可看出，存在常数 $C>0$，使得 $\|C_m\|_{op}\leqslant C^m\|A'\|_\infty^m$。故只要 $\|A'\|_\infty<1/C$，$C(f)$ 是 L^2 有界的，从而 $C(f)\in\mathrm{CZO}$。事实上，只要 $\|A'\|_\infty<\infty$，则 $C(f)$ 就是 L^2 有界的. 但对这一般情形，不能简单从 $T(1)$ 定理推出。

通过旋转的方法，可以类似地研究 Lipschitz 区域的双层位势算子(1.7)的 L^2 有界性。

§10.3 $T(1)$ 型定理与Calderón-Zygmund算子在Triebel-Lizorkin空间的有界性

我们将利用第九章的原子-分子分解，在 Triebel-Lizorkin空间证明一个 $T(1)$ 型定理。作为此定理的推论，一方面可以得到 Calderón-Zygmund 算子在这类空间的有界性结果，另一方面，给出上一节 $T(1)$ 定理的一个新证明。

定理3.1 设 $0<\alpha<\gamma\leqslant 1$，$1\leqslant p,q<\infty$。若 $T\in\mathrm{CZK}(\gamma)\cap\mathrm{WBP}$ 且 $T(1)=0$，则 T 是 $\dot F_p^{\alpha,q}$ 上的有界算子。

实际上，我们将证明的是下面的定理。定理3.1是它与§9.2中 Triebel-Lizorkin 空间原子-分子分解定理的一个明显的推论。

定理3.2 在定理3.1的条件下，若 a 是 $\dot{F}_p^{\alpha,q}$ 的光滑原子，则存在与 a 无关而仅依赖于算子 T 与空间维数 n 的常数 C，使得当 $\gamma<1$ 时，$CT(a)$ 是 $(\gamma,n+\gamma)$ 分子，当 $\gamma=1$ 时，$CT(a)$ 是 $(\beta,n+1)$ 分子，其中 $0<\alpha<\beta<1$。

为证明定理3.2，需要下面的引理。

引理3.1 在定理3.1的条件下，存在仅依赖于算子 T 与空间维数 n 的常数 C，使得对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$，它支于一半径为 t 的球 B_t 上，有 $T(\varphi)\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，且

$$\|T(\varphi)\|_\infty\leqslant C(\|\varphi\|_\infty+t\|\nabla\varphi\|_\infty).$$

证明 设 B_t 的中心为 ω。记 B_t 为 $B_t(\omega)$。首先看 $T(\varphi)$ 当 x 在 $B_{2t}(\omega)$ 外的情形。这时

$$g_1(x)=\int_{R^n}K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

在 $x\notin B_{2t}(\omega)$ 有意义，满足

$$|g_1(x)|\leqslant\int_{B_t(\omega)}C|x-y|^{-n}|\varphi(y)|\mathrm{d}y\leqslant C\|\varphi\|_\infty,$$

因为此时 $|x-y|\geqslant t$。

下面证明 $T(\varphi)$ 在 $Q_{3t}(\omega)$ 中（记为 $g_2(x)$）仍然是一有界函数，且满足

$$|g_2(x)|\leqslant C(\|\varphi\|_\infty+t\|\nabla\varphi\|_\infty),$$

其中 $Q_s(\omega)$ 表示以 ω 为中心，$2s$ 为边长的方体。为此，选取 $\chi\in\mathscr{D}$，当 $x\in Q_3(0)$ 时 $\chi(x)=1$，当 $x\notin Q_4(0)$ 时 $\chi(x)=0$，且 $0\leqslant\chi(x)\leqslant1$。记 $\chi^{\omega,t}(x)=\chi\left(\frac{x-\omega}{t}\right)$。这样

$$\begin{aligned}T(\varphi)&=T(\varphi\chi^{\omega,t})\\&=[T(\varphi\chi^{\omega,t})-\varphi T(\chi^{\omega,t})]+\varphi T(\chi^{\omega,t})\end{aligned}$$

$$= B + F,$$

其中

$$B = T(\varphi\chi^{\omega,t}) - \varphi T(\chi^{\omega,t}) = [T, M_\varphi]\chi^{\omega,t},$$

$$F = \varphi T(\chi^{\omega,t}),$$

M_φ: $f \to \varphi f$ 表示用 φ 作乘法的算子，$[T, M_\varphi] = TM_\varphi - M_\varphi T$ 表示T与 M_φ 的交换子.

下面的证明分几步进行. 第一步，证明积分

$$A(x) = \int_{R^n} K(x,y)[\varphi(y) - \varphi(x)]\chi^{\omega,t}(y)\mathrm{d}y \qquad (3.1)$$

是绝对收敛的，且满足

$$|A(x)| \leqslant Ct\|\nabla\varphi\|_\infty$$

当 $x \in Q_{3t}(\omega)$. 第二步证明B作为广义函数在 $Q_{3t}(\omega)$ 与 $A(x)$ 等同. 第三步证明 $T\chi^{\omega,t}$ 在 $B_t(\omega)$ 与一有界函数 $G(x)$ 相同，且 $\|G\|_\infty \leqslant C$, C 与 φ 无关. 这样 $g_2 = A + \varphi G$ 满足一切要求.

第一步

$$|A(x)| \leqslant \int_{Q_{4t}(\omega)} |K(x,y)||\varphi(y) - \varphi(x)|\chi^{\omega,t}(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\|\nabla\varphi\|_\infty \int_{Q_{4t}(\omega)} |x-y|^{-n}|x-y|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant Ct\|\nabla\varphi\|_\infty.$$

第二步　把 $Q_{5t}(\omega)$ 等分为一族相互不交且其边平行于坐标轴的方体 $Q^{l,m}$ 之并：

$$\bigcup_l Q^{l,m} = Q_{5t}(\omega),$$

其中 $1 \leqslant l \leqslant (5m)^n$. 令 $\bar{Q}^{l,m} = \frac{11}{10}Q^{l,m}$. 作单位分解 $1 = \sum_l \eta^{l,m}$ 当 $x \in Q_{4t}(\omega)$，其中 $\eta^{l,m} \in \mathscr{D}$, $\mathrm{supp}\eta^{l,m} \subset \bar{Q}^{l,m}$, $0 \leqslant \eta^{l,m} \leqslant 1$. 对任意 $\psi \in \mathscr{D}$, $\mathrm{supp}\psi \subset Q_{3t}(\omega)$, 我们的目的是要证明

$\langle B,\psi\rangle=\int_{R^n}A(x)\psi(x)\mathrm{d}x$. 记$x^{l,m}$为$Q^{l,m}$中心，$\psi=\psi_0^{l,m}+\psi_1^{l,m}$，其中

$\psi_0^{l,m}=\psi\chi^{x^{l,m},t/m}$. 显然$\mathrm{supp}\psi_0^{l,m}\subset Q_{\frac{4t}{m}}(x^{l,m})$. 当$x\in Q_{\frac{3t}{m}}(x^{l,m})$

时，$\psi_0^{l,m}=\psi$，当 $x\notin Q_{\frac{4t}{m}}(x^{l,m})$时，$\psi_1^{l,m}=\psi$。由于

$$\varphi=\sum_l\eta^{l,m}\varphi,\quad \chi^{\omega,t}=\sum_l\eta^{l,m}\chi^{\omega,t},$$

则

$$\begin{aligned}\langle B,\psi\rangle&=\langle[T,M_\varphi]\chi^{\omega,t},\psi\rangle\\&=\sum_l\langle[T,M_\varphi]\eta^{l,m}\chi^{\omega,t},\psi_0^{l,m}\rangle\\&\quad+\sum_l\langle[T,M_\varphi]\eta^{l,m}\chi^{\omega,t},\psi_1^{l,m}\rangle\\&=\mathrm{I}_m+\mathrm{II}_m.\end{aligned}$$

令 $h(x,y)=\sum_l\eta^{l,m}(y)\psi_1^{l,m}(x)$。 注意到 $\mathrm{supp}\,\eta^{l,m}\cap\mathrm{supp}\psi_1^{l,m}=\varnothing$，有

$$\mathrm{II}_m=\iint_{R^n}K(x,y)[\varphi(y)-\varphi(x)]\chi^{\omega,t}(y)h(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

当$|x-y|<t/10m$ 时，如果对某个 $l,\eta^{l,m}(y)\neq0$，则 $y\in\bar{Q}^{l,m}=\frac{11}{10}Q^{l,m}$，从而 $x\in\frac{12}{10}Q^{l,m}$，故$\psi_1^{l,m}(x)=0$. 这就是说，当$|x-y|<\frac{t}{10m}$时，$h(x,y)=0$。另一方面，当 $|x-y|>100\sqrt{n}\,t/m$ 时，$\eta^{l,m}(y)\psi_1^{l,m}(x)=\eta^{l,m}(y)\psi(x)$，这是因为，若$\eta^{l,m}(y)=0$，这是显然的，否则，$y\in\bar{Q}^{l,m}$，从而 $x\notin Q_{\frac{4t}{m}}(\omega)$，故$\psi_1^{l,m}(x)=\psi(x)$。

也就是说，当 $|x-y|>100\sqrt{n}\,t/m$ 时，$h(x,y)=\psi(x)$。于是

$$\text{II}_m = \iint\limits_{\frac{t}{10m} \leqslant |x-y| \leqslant \frac{100\sqrt{n}t}{m}} K(x,y)[\varphi(y) - \varphi(x)]\chi^{\omega,t}(y)h(x,y)\,dy\,dx$$

$$+ \iint\limits_{|x-y| > \frac{100\sqrt{n}t}{m}} K(x,y)[\varphi(y) - \varphi(x)]\chi^{\omega,t}(y)\psi(x)\,dy\,dx$$

$$= \text{II}_m^1 + \text{II}_m^2.$$

我们断言，$\lim\limits_{m\to\infty} \text{II}_m^1 = 0$，而$\lim\limits_{m\to\infty} \text{II}_m^2 = \int_{R^n} A(x)\psi(x)\,dx$.事实上，由于(3.1)中定义 $A(x)$的积分是绝对收敛的，用Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{m\to\infty} \text{II}_m^2 = \lim_{m\to\infty} \iint\limits_{|x-y| \geqslant \frac{100\sqrt{n}t}{m}} K(x,y)[\varphi(y) - \varphi(x)] \cdot \chi^{\omega,t}(y)\psi(x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{R^n} A(x)\psi(x)\,dx.$$

再由$|\psi_l^{l,m}(x)| \leqslant |\psi(x)|$以及$0 \leqslant \sum\limits_l \eta^{l,m}(y) \leqslant 1$，知

$$|\text{II}_m^1| \leqslant \iint\limits_{\frac{t}{10m} \leqslant |x-y| \leqslant \frac{100\sqrt{n}t}{m}} |K(x,y)||\varphi(y) - \varphi(x)| \cdot |\chi^{\omega,t}(y)||\psi(y)|\,dy\,dx$$

$$\leqslant \|\psi\|_\infty \int_{Q_{3t}(\omega)} \int_{|y-x| \leqslant \frac{100\sqrt{n}t}{m}} C|x-y|^{-n}\|\nabla\varphi\|_\infty |x-y|\,dy\,dx$$

$$\leqslant C\|\psi\|_\infty \|\nabla\varphi\|_\infty |Q_{3t}(\omega)| \cdot \frac{t}{m} \to 0.$$

现在来证明$\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{I}_m=0$。在

$$\varphi(y)=\varphi(x)+\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_j)\int_0^1 \mathrm{D}_j\varphi(x+\tau(y-x))\mathrm{d}\tau$$

$$\equiv\varphi(x)+(y-x)\cdot\Phi(x,y)$$

中，令 $x=x^{l,m}$，则

$$\langle T(\eta^{l,m}\varphi\chi^{\omega,t})-\varphi T(\eta^{l,m}\chi^{\omega,t}),\psi_0^{l,m}\rangle$$

$$=\langle\varphi(x^{l,m})T(\eta^{l,m}\chi^{\omega,t})$$

$$+T(\eta^{l,m}\chi^{\omega,t}(y-x^{l,m})\Phi(x^{l,m},y)),\psi_0^{l,m}\rangle$$

$$-\langle\varphi(x)T(\eta^{l,m}\chi^{\omega,t}),\psi_0^{l,m}\rangle$$

$$=\frac{t}{m}\left\langle T(\eta^{l,m}\chi^{\omega,t}),\frac{\varphi(x^{l,m})-\varphi(x)}{\frac{t}{m}}\psi_0^{l,m}(x)\right\rangle$$

$$+\frac{t}{m}\left\langle T\left(\frac{y-x^{l,m}}{\frac{t}{m}}\Phi(x^{l,m},y)\eta^{l,m}\chi^{\omega,t}\right),\psi_0^{l,m}\right\rangle.$$

故

$$\mathrm{I}_m=\sum_l\left\{\frac{t}{m}\left\langle T(\eta^{l,m}\chi^{\omega,t}),\frac{\varphi(x^{l,m})-\varphi(x)}{\frac{t}{m}}\psi_0^{l,m}(x)\right\rangle\right.$$

$$\left.+\frac{t}{m}\left\langle T\left(\frac{y-x^{l,m}}{\frac{t}{m}}\Phi(x^{l,m},y)\eta^{l,m}\chi^{\omega,t}\right),\psi_0^{l,m}\right\rangle\right\}.$$

注意到$\mathscr{D}$的一个有界集$\mathscr{B}$是指，存在一紧集$D\subset\boldsymbol{R}^n$以及$\{C_\alpha\}$，使得$\varphi\in\mathscr{B}$就有$\mathrm{supp}\varphi\subset D$且$|\mathrm{D}^\alpha\varphi(x)|\leqslant C_\alpha$，则 I_m 中和号内的每一项都形如$\langle T\theta,\sigma\rangle$，其中$\theta,\sigma$都可从$\mathscr{D}$中一有界集$\mathscr{B}$的函数经平移$x^{l,m}$与展缩$\frac{t}{m}$得到。为说明这一点，只需验证$|\mathrm{D}^\alpha\theta(x)|\leqslant C_\alpha\left(\frac{t}{m}\right)^{-|\alpha|}$，$|\mathrm{D}^\alpha\sigma(x)|\leqslant C_\alpha\left(\frac{t}{m}\right)^{-|\alpha|}$，以及 $\mathrm{supp}\,\theta,\mathrm{supp}\,\sigma\subset B_{\frac{\omega t}{m}}(x^{l,m})$，而这是容易做到的。

由T的弱有界性，得到

$$|\mathrm{I}_m| \leqslant C\frac{t}{m}(5m)^n\left(\frac{t}{m}\right)^n = C\frac{t^{n+1}}{m} \to 0, \quad 当 m \to \infty.$$

第三步 要证明$T(\chi^{\omega,t})$在$B_t(\omega)$与一有界函数G相同。为此，需要用条件$T(1)=0$。由$T(1)$的定义可知，对任意$\psi \in \mathscr{D}$，$\mathrm{supp}\psi \subset B_t(\omega)$，$\int_{R^n}\psi \mathrm{d}x = 0$，当$y \notin Q_{3t}(\omega)$时，$T^*(\psi)(y)$有定义，且

$$T^*(\psi)(y) = \int_{R^n}[K(x,y) - K(\omega,y)]\psi(x)\mathrm{d}x,$$

因此

$$|T^*(\psi)(y)| \leqslant C\int_{B_t(\omega)}|K(x,y) - K(\omega,y)||\psi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_{B_t(\omega)}|x-\omega|^\gamma|x-y|^{-n-\gamma}|\psi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant Ct^\gamma|y-\omega|^{-n-\gamma}\|\psi\|_1.$$

由$1 = \chi^{\omega,t} + (1-\chi^{\omega,t})$以及$T(1)=0$，知

$$0 = \langle T(1),\psi\rangle = \langle T(\chi^{\omega,t}),\psi\rangle + \langle T^*(\psi), 1-\chi^{\omega,t}\rangle,$$

故

$$|\langle T(\chi^{\omega,t}),\psi\rangle| = |\langle T^*(\psi), 1-\chi^{\omega,t}\rangle|$$

$$\leqslant C\int_{R^n}(1-\chi^{\omega,t}(y))t^\gamma|y-\omega|^{-n-\gamma}\|\psi\|_1\mathrm{d}y$$

$$\leqslant Ct^\gamma\|\psi\|_1\int_{|y-\omega|>3t}|y-\omega|^{-n-\gamma}\mathrm{d}y$$

$$= C\|\psi\|_1. \tag{3.2}$$

以上不等式对所有满足$\psi \in \mathscr{D}$，$\mathrm{supp}\,\psi \subset B_t(\omega)$，$\int_{R^n}\psi\mathrm{d}x = 0$的$\psi$都成立，而且$C$与$\psi$无关。假如我们能证明，当把条件$\int_{R^n}\psi\mathrm{d}x = 0$去掉时，上式仍然成立，则利用$L^1$与$L^\infty$的对偶关系，便得到了

$T(\chi^{\omega,t})$ 在 $B_t(\omega)$ 与一有界函数 G 相同。

事实上，对任意 $\psi\in\mathscr{D}$，$\operatorname{supp}\psi\subset B_t(\omega)$。令 $b=\int_{R^n}\psi dx$. 取 $\eta\in\mathscr{D}$, $\operatorname{supp}\eta\subset B_1(0)$, $\eta\geqslant 0$ 且 $\int_{R^n}\eta dx=1$. 这时 $\int_{R^n}t^{-n}\eta^{\omega,t}dx=1$. 因此 $\psi-bt^{-n}\eta^{\omega,t}\in\mathscr{D}$，且其支集包含在 $B_t(\omega)$内,其积分值为0. 故

$$\langle T(\chi^{\omega,t}),\psi\rangle=\langle T(\chi^{\omega,t}),\psi-bt^{-n}\eta^{\omega,t}\rangle + \langle T(\chi^{\omega,t}),bt^{-n}\eta^{\omega,t}\rangle = \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

由(3.2)知

$$|\mathrm{I}|\leqslant C\|\psi-bt^{-n}\eta^{\omega,t}\|_1\leqslant C\|\psi\|_1+|b|\|\eta\|_1 \leqslant (C+1)\|\psi\|_1.$$

再由 $T\in\mathrm{WBP}$，有

$$|\mathrm{II}|\leqslant|b|t^{-n}|\langle T(\chi^{\omega,t}),\eta^{\omega,t}\rangle| \leqslant C|b|=C\|\psi\|_1.$$

这就证明了

$$|\langle T(\chi^{\omega,t}),\psi\rangle|\leqslant C\|\psi\|_1$$

对任意满足 $\psi\in\mathscr{D}$，$\operatorname{supp}\psi\subset B_t(\omega)$的 ψ 都成立，从而在 $B_t(\omega)$，$T(\chi^{\omega,t})$与一有界函数 G 相同.由于 $\operatorname{supp}\varphi\subset B_t(\omega)$,知$\varphi T(\chi^{\omega,t})=\varphi G$ 在整个 $\boldsymbol{R}^n$ 成立，它显然在 Q_{3t} 内是一有界函数。于是,我们证明了 $T(\varphi)$在 $Q_{3t}(\omega)$等同于一有界函数 $g_2=A+\varphi G$，且$\|g_2\|_\infty\leqslant C(\|\varphi\|_\infty+t\|\nabla\varphi\|_\infty)$。引理3.1证完。

引理3.2 设T 满足引理 3.1的条件，$\varphi\in\mathscr{D}$，$x_1,x_2\in\boldsymbol{R}^n$，$x_1\neq x_2$。令

$$\xi(x)=\xi_0\left(\frac{x-x_1}{|x_1-x_2|}\right),\qquad \eta=1-\xi,$$

其中 $\xi_0\in\mathscr{D}$，当$|x|\leqslant 10$时 $\xi_0(x)=1$,当$|x|\geqslant 20$ 时 $\xi_0(x)=0$,则

$$T(\varphi)(x_2)-T(\varphi)(x_1)$$

$$=\int_{R^n}[K(x_2,y)-K(x_1,y)](\varphi(y)-\varphi(x_1))\eta(y)dy$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{|y-x_1|} K(x_1,y)[\varphi(y)-\varphi(x_1)]\xi(y)\mathrm{d}y \\
&-\int_{|y-x_2|} K(x_2,y)[\varphi(y)-\varphi(x_2)]\xi(y)\mathrm{d}y \\
&+[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)]T\xi(x_2).
\end{aligned}
$$

证明　由引理3.1知，如果 T 满足引理3.1的条件，$\varphi\in\mathscr{D}$，那么 $T\varphi$ 不仅仅是 $\mathscr{D}'$ 的广义函数，而且是一个 L^∞ 函数，即在除去一零测度集合外，$T(\varphi)$ 与一个 L^∞ 函数相同。假设 $\mathrm{supp}\,\psi\subset Q$，则对任意 $x\in Q$，有

$$
T(\psi)(x)=\int_{R^n}K(x,y)[\psi(y)-\psi(x)]\chi_0(y)\mathrm{d}y+\psi(x)T\chi_0(x)+C_Q,
$$

其中 C_Q 是仅依赖于 Q 的常数，$\chi_0\in\mathscr{D}$，$\chi_0(y)=1$ 当 $y\in 2Q$，而 $\chi_0(y)=0$ 当 $x\in 4Q$。并且上式与 χ_0 的选取无关。

应用上式于 $\psi(x)=\varphi(x)\xi(x)$，则只要 $|x-x_1|<9|x_2-x_1|$，有

$$
\begin{aligned}
T(\varphi)(x)&=T(\varphi\xi)(x)+T(\varphi\eta)(x) \\
&=\int_{R^n}K(x,y)[\varphi(y)-\varphi(x)]\xi(y)\mathrm{d}y+\varphi(x)T(\xi)(x) \\
&\quad+\int_{R^n}K(x,y)\varphi(y)\eta(y)\mathrm{d}y+C.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&T(\varphi)(x_2)-T(\varphi)(x_1) \\
&\quad=\int_{R^n}K(x_2,y)[\varphi(y)-\varphi(x_2)]\xi(y)\mathrm{d}y \\
&\qquad-\int_{R^n}K(x_1,y)[\varphi(y)-\varphi(x_1)]\xi(y)\mathrm{d}y \\
&\qquad+\varphi(x_2)T\xi(x_2)-\varphi(x_1)T\xi(x_1) \\
&\qquad+\int_{R^n}[K(x_2,y)-K(x_1,y)]\varphi(y)\eta(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

注意到 $T(1)=0$，知

$$\varphi(x_2)T(\xi)(x_2)-\varphi(x_1)T(\xi)(x_1)$$

$$=[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)]T(\xi)(x_2)+\varphi(x_1)[T(\xi)(x_2)-T(\xi)(x_1)]$$

$$=[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)]T(\xi)(x_2)-\varphi(x_1)[T(\eta)(x_2)-T(\eta)(x_1)].$$

代回上式，便得引理所要求的结果。

定理 3.2 的证明 设 $a=a_Q$ 是任意光滑原子，其支集为$3Q$。不妨假定Q的左下端点是原点。现在，光滑原子定义中的$N=0$。

我们首先要证明的是

$$|T(a)(x)|\leqslant C|Q|^{1/2}(1+2^{\mu}|x-x_Q|)^{-n-\gamma}, \qquad (3.3)$$

其中 $l(Q)=2^{-\mu}$ 是Q的边长，常数C不依赖于原子a的选择，不失一般性，可以假设Q的左下顶点 x_Q 是原点。

首先设$|x|\geqslant 6\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，于是

$$T(a)(x)=\int_{R^n}K(x,y)a(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{R^n}[K(x,y)-K(x,0)]a(y)\mathrm{d}y.$$

由 $|y|\leqslant 2\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，知$|x-y|\geqslant|x|-|y|\geqslant 4\sqrt{n}\,2^{-\mu}\geqslant 2|y|$。利用$K$的光滑性条件，有

$$|T(a)(x)|\leqslant C\int_{|y|\leqslant 2\sqrt{n}\,2^{-\mu}}\frac{|y|^{\gamma}}{|x-y|^{n+\gamma}}|a(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{C}{|x|^{n+\gamma}}\int_{|y|\leqslant 2\sqrt{n}\,2^{-\mu}}|y|^{\varepsilon}|a(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C|Q|^{-\frac{1}{2}}(2^{\mu}|x|)^{-n-\gamma},$$

即当$|x|>6\sqrt{n}\,2^{-\mu}$时，(3.3)成立。

当 $|x|\leqslant 6\sqrt{n}\,2^{-\mu}$ 时，由引理3.1以及光滑原子的大小条件，有

$$\|T(a)\|_\infty \leqslant C(\|a\|_\infty + 2^{-\mu}\|\nabla a\|_\infty) \leqslant C|Q|^{-1/2},$$

它蕴含了（3.3）。

剩下要验证的是，$T(a)$满足分子的光滑性条件，即要证明

$$\begin{aligned}|T(a)(x_1) - T(a)(x_2)| &\leqslant C|Q|^{-1/2}(2^\mu|x_1 - x_2|)^\gamma\{(1+2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma} \\ &\quad + (1+2^\mu|x_2|)^{-n-\gamma}\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

当$|x_1 - x_2| \geqslant 2^{-\mu}$时，由(3.3)知

$$\begin{aligned}|T(a)(x_1) - T(a)(x_2)| &\leqslant |T(a)(x_1)| + |T(a)(x_2)| \\ &\leqslant C|Q|^{-1/2}\{(1+2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma} + (1+2^\mu|x_2|)^{-n-\gamma}\} \\ &\leqslant C|Q|^{-1/2}(2^\mu|x_1 - x_2|)^\gamma\{(1+2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma} \\ &\quad + (1+2^\mu|x_2|)^{-n-\gamma}\},\end{aligned}$$

即（3.4)成立。

现在设$|x_1 - x_2| < 2^{-\mu}$。我们考虑以下几种情形。

情形1 $|x_1|$，$|x_2| \geqslant 10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$。此时我们有

$$|T(a)(x_1) - T(a)(x_2)| = \left|\int_{R^n}[K(x_2, y) - K(x_1, y)]a(y)\,dy\right|.$$

由于$|y| \leqslant 2\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，$|x_1 - x_2| \leqslant 2^{-\mu}$以及$|x_1| \geqslant 10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，有$|x_1 - y| \geqslant 2|x_1 - x_2|$。因此

$$\begin{aligned}&\left|\int_{R^n}[K(x_2, y) - K(x_1, y)]a(y)\,dy\right| \\ &\leqslant C\int_{|y|\leqslant 2\sqrt{n}2^{-\mu}} \frac{|x_1 - x_2|^\gamma}{|x_1 - y|^{n+\gamma}}|a(y)|\,dy \\ &\leqslant C|Q|^{-1/2}|x_1 - x_2|^\gamma|x_1|^{-n-\gamma}\int_{|y|\leqslant 2\sqrt{n}2^{-\mu}} dy \\ &\leqslant C|Q|^{-1/2}(2^\mu|x_1 - x_2|)^\gamma(2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma} \\ &\leqslant C|Q|^{-1/2}(2^\mu|x_1 - x_2|)^\gamma\{(1+2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma} \\ &\quad + (1+2^\mu|x_2|)^{-n-\gamma}\},\end{aligned}$$

这就是（3.4)。

情形2　$|x_1|\leqslant 10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，$|x_2|\leqslant 10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$。

令 $r=|x_1-x_2|$，$\varphi_r(u)=\varphi\left(\dfrac{u}{r}\right)$，其中 $\varphi\in\mathscr{D}$，当 $|u|\leqslant 10$ 时 $\varphi(u)=1$，当 $|u|\geqslant 20$ 时 $\varphi(u)=0$。$\bar{\varphi}=1-\varphi$。由引理3.2有

$$
\begin{aligned}
&T(a)(x_1)-T(a)(x_2)\\
&=\int_{R^n}[K(x_1,y)-K(x_2,y)](a(y)-a(x_1))\bar{\varphi}_r(y-x_1)\,dy\\
&\quad+\int_{\{y\neq x_1\}}K(x_1,y)(a(y)-a(x_1))\varphi_r(y-x_1)\,dy\\
&\quad-\int_{\{y\neq x_2\}}K(x_2,y)(a(y)-a(x_2))\varphi_r(y-x_1)\,dy\\
&\quad+(a(x_1)-a(x_2))T(\varphi_r)(x_2)=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

为估计IV，用引理3.1，注意到 $\|\varphi_r\|_\infty=\|\varphi\|_\infty$，$\operatorname{supp}\varphi_r\subset\tilde{Q}$，其中 $|\tilde{Q}|^{1/n}\sim r$，因此 $|\tilde{Q}|^{1/n}\|\nabla\varphi_r\|_\infty\sim\|\nabla\varphi\|_\infty$。故

$$\|T(\varphi_r)\|_\infty\leqslant C(\|\varphi_r\|_\infty+|\tilde{Q}|^{1/n}\|\nabla\varphi_r\|_\infty)\leqslant C,$$

其中 C 仅依赖于固定的 φ 而与 r 无关。

再用原子的光滑性条件，得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IV}&\leqslant C|x_1-x_2||Q|^{-1/2-1/n}\\
&=C|Q|^{-1/2}(2^\mu|x_1-x_2|)\\
&\leqslant C|Q|^{-1/2}(2^\mu|x_1-x_2|)^\gamma\\
&\leqslant C|Q|^{-1/2}(2^\mu|x_1-x_2|)^\gamma\\
&\quad\times\{(1+2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma}+(1+2^\mu|x_2|)^{-n-\gamma}\},
\end{aligned}
$$

这里我们用到了 $2^\mu|x_1-x_2|<1$，$0<r\leqslant 1$ 以及 $2^\mu|x_j|\leqslant 10\sqrt{n}$，$j=1,2$。

记

$$S=\{y\in \boldsymbol{R}^n:\ 10|x_2-x_1|\leqslant|y-x_1|\leqslant 11\sqrt{n}\,2^{-\mu}\},$$
$$T=\{y\in \boldsymbol{R}^n:\ |y-x_1|>11\sqrt{n}\,2^{-\mu}\},$$

则

$$\mathrm{I}\leqslant C\int_S\frac{|x_1-x_2|^\gamma}{|y-x_1|^{n+\gamma}}|a(y)-a(x_1)|\,dy$$

$$+\int_T \frac{|x_1-x_2|^\gamma}{|y-x_1|^{n+\gamma}}|Q|^{-1/2}dy.$$

由原子的光滑性条件，当$\gamma<1$时，便得到

$$\mathrm{I}\leqslant C\left(|Q|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\int_S \frac{|x_1-x_2|^\gamma}{|y-x_1|^{n+\gamma-1}}dy+|Q|^{-\frac{1}{2}}|x_1-x_2|^\gamma 2^{\mu\gamma}\right)$$

$$\leqslant C|Q|^{-\frac{1}{2}}(2^\mu|x_1-x_2|)^\gamma$$

$$\leqslant C|Q|^{-\frac{1}{2}}(2^\mu|x_1-x_2|)^\gamma\{(1+2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma}$$
$$+(1+2^\mu|x_2|)^{-n-\gamma}\}.$$

当$\gamma=1$时，上面的推理不成立，但很容易修改一下而得到$T(a)$满足$(\beta,n+1)$分子的结论.

为估计Ⅱ，记

$$U=\{y\in \boldsymbol{R}^n:\ 0<|y-x_1|\leqslant 20|x_1-x_2|\},$$

则

$$\mathrm{II}\leqslant C\int_U |K(x_1,y)||a(y)-a(x_1)|dy$$

$$\leqslant C\int_U \frac{|y-x_1|}{|y-x_1|^n}|Q|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}dy$$

$$\leqslant C|Q|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}|x_1-x_2|$$

$$\leqslant C|Q|^{-\frac{1}{2}}(2^\mu|x_1-x_2|)^\gamma$$
$$\times\{(1+2^\mu|x_1|)^{-n-\gamma}+(1+2^\mu|x_2|)^{-n-\gamma}\}.$$

Ⅲ的估计完全类似于Ⅱ。这样,在情形2,我们证明了(3.4).

剩下的两种情形是$|x_1|\geqslant 10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，$|x_2|<10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$以及$|x_1|<10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，$|x_2|\geqslant 10\sqrt{n}\,2^{-\mu}$。由于$|x_1-x_2|<2^{-\mu}$，所以这两种都可以归结成$|x_1|\geqslant 9\sqrt{n}\,2^{-\mu}$，$|x_2|\geqslant 9\sqrt{n}\,2^{-\mu}$。而这时只要对情形Ⅰ的推理稍加修改，便可证得所要求的结果。

这样，定理3.2获证．由第九章的结果，便证得定理3.1.

推论3.1　设$0<\alpha<\gamma\leqslant 1$，$1\leqslant p,q<\infty$。若$T$是Calderón-

Zygmund 算子，$T(1)=0$，则T在$\dot{F}_p^{\alpha,q}$有界。

在$\alpha=0$，$1\leqslant p,q<\infty$的情形，定理3.2证明的推理同样可以进行，只是这时分子要求加上$\int_{R^n} m(x)\,\mathrm{d}x=0$的条件。如果假设$T^*(1)=0$，则当$a$是光滑原子时，有$\int_{R^n} T(a)(x)\,\mathrm{d}x=0$。这样，我们便证明了，若$T\in \mathrm{CZK}\cap \mathrm{WBP}$，$T(1)=T^*(1)=0$，则$T$在$\dot{F}_p^{0,q}$有界，当$1\leqslant p,q<\infty$。特别地，注意到$L^p=\dot{F}_p^{0,2}$，当$1<p<\infty$，$H^1=\dot{F}_1^{0,2}$，我们便得到了$T(1)$定理的一个新证明。

推论3.2 $T\in \mathrm{CZK}\cap \mathrm{WBP}$，$T(1)=T^*(1)=0$，$1<p<\infty$，则$T$在$L^p,H^1$有界。

下面证明定理3.1的一个“逆定理”。

定理3.3 设T是$\mathscr{D}$到$\mathscr{D}'$的连续线性算子，它把每一个光滑原子$(N=0)$映成$(\beta,n+\gamma)$分子，其中$0<\beta<\gamma\leqslant 1$，则算子$T$的核$K(x,y)$满足下面的 Calderón-Zygmund 估计：

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n}, \tag{3.6}$$

当$|x-y|\geqslant 2|x-x'|$时，

$$|K(x,y)-K(x',y)|\leqslant C|x-x'|^{\beta}|x-y|^{-n-\beta}. \tag{3.7}$$

证明 设$\theta\in\mathscr{D}$是径向函数，$\mathrm{supp}\,\theta\subset\{|x|\leqslant 1\}$，$\int_{R^n}\theta(x)\,\mathrm{d}x=0$，且当$\xi\neq 0$时，

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\hat{\theta}(2^{-j}\xi)=1.$$

不难看出，这样的θ是存在的。

设$f\in\mathscr{D}'$，令$\Delta_j(f)=f*\theta_j$，其中$\theta_j(x)=2^{jn}\theta(2^j x)$，则在分布意义下，

$$Tf=\sum_{j=-\infty}^{\infty}T\Delta_j f.$$

记$K_j(x,y)$为$T\Delta_j$的核，则$K_j(x,y)=T(\theta_j(\cdot-y))(x)$。因为$|Q|^{1/2}\theta_j(u-y)$是光滑原子的固定倍数，其中$Q$是包含$y$的边长为$2^{-j}$的二进方体，所以$K_j(x,y)$是$(\beta,n+\gamma)$分子。因此

$$|K_j(x,y)|\leqslant C|Q|^{-1/2}\frac{|Q|^{-1/2}}{(1+l(Q)^{-1}|x-y|)^{n+\gamma}}$$

$$=\frac{C2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma}},$$

$$|K_j(x,y)-K_j(x',y)|\leqslant C(2^j|x-x'|)^{\beta}$$

$$\times\left[\frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma}}+\frac{2^{jn}}{(1+2^j|x'-y|)^{n+\gamma}}\right].$$

故

$$|K(x,y)|\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}|K_j(x,y)|$$

$$\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma}}$$

$$\leqslant C\sum_{-\infty}^{\log_2(1/|x-y|)}2^{jn}+C\sum_{\log_2(1/|x-y|)}^{\infty}2^{-j\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}$$

$$\leqslant C2^{n\log_2(1/|x-y|)}+C|x-y|^{-n-\gamma}2^{-\gamma\log_2(1/|x-y|)}$$

$$\leqslant C|x-y|^{-n}.$$

而当$|x-y|\geqslant 2|x-x'|$时，

$$|K(x,y)-K(x',y)|\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}|K_j(x,y)-K_j(x',y)|$$

$$\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}(2^j|x-x'|)^{\beta}\left[\frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma}}\right.$$

$$\left.+\frac{2^{jn}}{(1+2^j|x'-y|)^{n+\gamma}}\right]$$

$$\leqslant C|x-x'|^{\beta}\left\{\sum_{-\infty}^{\log_2(1/|x-y|)}2^{j(n+\beta)}\right.$$

$$+\sum_{\log_2(1/|x-y|)}^{\infty} 2^{(\beta-\gamma)j}|x-y|^{-n-\gamma}\Big\}$$

$$\leqslant C|x-x'|^{\beta}\{|x-y|^{-n-\beta}+|x-y|^{-n-\gamma}|x-y|^{\gamma-\beta}\}$$

$$\leqslant C|x-x'|^{\beta}|x-y|^{-n-\beta}.$$

定理 3.3 证完.

§10.4 注释与进一步的结果

注释

Calderón-Zygmund 算子的概念是 R.Coifman 与 Y.Meyer 于1978年提出的，他们证明了这种算子的 L^2 有界性保证了 $L^p(1<p<\infty)$ 有界性[CM2].J.-L.Journé对Calderón-Zygmund算子理论做了比较系统的处理[Jou1]，有关内容可参阅[M6],[CM6]。仿积最早是 J.M.Bony 在研究偏微分方程时作为一种线性化的工具提出的。它具有许多不同的形式。Coifman-Meyer从Fourier 分析的角度对它进行了详尽的研究[CM2],[CM3]。Calderón交换子的有界性，最早由 A.P.Calderón于 1965 年加以研究(参见[C2])。对一般的 k,其 L^2 有界性的证明属于Coifman与 Meyer(见[CM1],[C4])。光滑曲线上的 Cauchy 积分算子的研究已有很长的历史。Lipschitz 曲线上的 Cauchy积分算子的研究，由于有本质上的困难，长期以来进展不大。直到 1977 年，在$\|\varphi'\|_\infty$很小的条件下，Calderón 用复分析的方法证明了算子(1.6)的 L^2 有界性（参见[C3]，[C4]）。对一般的情形($\|A'\|_\infty<\infty$)，R.Coifman，A.Mcintosh 与 Y.Meyer 用多线性算子理论证明了它的 L^2 有界性[CMM1].以后，出现了许多不同的证明，见[Mur]。关于 Lipschitz 区域上边值问题的一个很好的综述是[K3]。

$T(1)$定理是 G.David与J.-L.Journé于 1982 年首先发现并加以证明的。他们的证明用了Cotlar 的一个引理(参见[DJ])。不久

以后，Coifman-Meyer给出了一个简化的证明(参见[CM5]，[CM4])。本书引用的证明属于R.Coifman与S.Semmes。我们的材料来自[D5]。

研究Calderón-Zygmund算子在L^p空间以外的连续性，可参见[M1]、[M3]，[De1]。本章§10.3的主要结果——定理3.1与3.3，属于韩永生，M.Frazier，B.Jawerth与G.Weiss[FHJW]。

进一步的结果

1. 关于仿积算子(1.4)，彭立中证明了Π_b是紧算子的充分必要条件是$b\in\mathrm{VMO}$。彭立中还研究了它的迹理想性质（见[Pe3]）。

2. 可以用非卷积算子族推广仿积的概念。设$\{S_t\}$,$\{T_t\}$是ε-算子族(见§9.4中的3)，$S_t(1)=S_t^*(1)=0$，$T_t(1)=1$.定义广义仿积为

$$\Pi_b(f)=\int_0^{\infty}S_t(b)T_t(f)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

邓东皋、韩永生证明了，当$b\in\mathrm{BMO}$时，Π_b是L^2有界算子，见[DeH2]。

3. 关于Cauchy积分算子(1.6)

$$C_{\varphi}(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{(x+y)+\mathrm{i}(\varphi(x)-\varphi(y))}\mathrm{d}y,$$

T.Murai证明了，它在$L^2(\boldsymbol{R})$的算子范数被$(1+\|\varphi'\|_{\infty})^{1/2}$控制。G.David最近证明了这已是最好可能的了。见[Mur]，[D2]。

4. 与Lipschitz曲线上Cauchy积分算子的高维推广有关的一个问题是Kato问题。设$A(x)=(a_{j,k}(x))_{1\leqslant j,\,k\leqslant n}$是$n\times n$阶复值函数组成的矩阵，每个元素$a_{j,k}\in L^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$，并且$\mathrm{Re}\sum_{j,k}a_{j,k}(x)\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant\eta|\xi|^2$,其中$\eta>0$固定.记$T=-\mathrm{div}(A(x)\mathrm{grad})$，它是极大增长算子(maximal accretive)，可以开平方根$\sqrt{T}$. Kato

猜想这个算子的定义域是 Sobolev 空间 $H_2^1(\mathbf{R}^n)$。已有的结果是，存在 $\varepsilon_n>0$，若矩阵 A 与单位矩阵之差的每一个元素的 L^∞ 模小于 ε_n（记为 $\|A-I\|_\infty<\varepsilon_n$），则 $\sqrt{T}$ 的定义域是 Sobolev空间 $H_2^1(\mathbf{R}^n)$。这个结果是邓东皋、Coifman-Meyer以及 Fabes-Jerison-Kenig 几乎同时证明的，见[CDeM]、[FJK]。David-Journé用 $T(1)$ 定理给出了这个结果的另一个证明，见[DJ]。能否把 ε_n 改进为 1 或把它精确估计出来，这仍然是一个未解决的问题。也可参看[CM6]。

5．Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子到高维的一种推广就是位势算子。它们在解决 Lipschitz 区域上的 Dirichlet 问题与 Neumann 问题中起了重要的作用。为简单起见，我们只考虑 Laplace 方程。

Dirichlet 问题：

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} \Delta u=0, \\ u|_{\partial D}=f. \end{cases}$$

Neumann 问题：

$$(\mathrm{N})\qquad \begin{cases} \Delta u=0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}=f. \end{cases}$$

设 $D\subset\mathbf{R}^n$。如果对任意 $y_0\in\partial D$，存在以 y_0 为中心的球 B 与坐标系 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$，x_n 以及函数 φ：$\mathbf{R}^{n-1}\to\mathbf{R}$，使得

$$\varphi(0)=0,\quad |\varphi(x')-\varphi(y')|\leqslant C|x'-y'|,$$

而

$$D\cap B=\{x=(x',x_n)\,|\,x_n>\varphi(x')\}\cap B,$$

则称 D 为 Lipschitz 区域。如果上面的 φ 可以选作 C^1，则称 D 为 C^1 区域。如果 φ 满足

$$|\nabla\varphi(x')-\nabla\varphi(y')|\leqslant C|x'-y'|^\alpha,$$

其中 $0<\alpha\leqslant1$，则称 D 为 $C^{1,\alpha}$ 区域。

如果 D 是 $C^{1,\alpha}$ 区域（$\alpha>0$），这时问题(D)可以通过双层位势

把解表示出来：

$$u(x)=K(g)(x)$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D}\frac{\langle x-y,N_y\rangle}{|x-y|^n}g(y)\mathrm{d}\sigma_y,$$

其中 $g(y)=T^{-1}(f),T=\frac{1}{2}I+K$，而

$$K(f)(y)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D}\frac{\langle y-z,N_z\rangle}{|y-z|^n}f(z)\mathrm{d}\sigma_z,\quad y\in\partial D.$$

在 $C^{1,\alpha}$ 区域，算子 K 在 $L^p(\partial D)$ 是紧的，用Fredholm 理论知 T 可逆，从而在 $L^p(1<p<\infty)$ 解决了问题(D)。

在 C^1 区域，问题要复杂一些.1977年 Calderón 证明了算子 K 在 $L^p(\partial D)$ 是有界的 $(1<p<\infty)$。以后不久，Fabes，Jodeit与 Riviere 证明了 K 在 $L^p(\partial D)$ 是紧的，从而在 C^1 区域解决了问题 (D)。而问题(N)，可以用单层位势类似解决。

对 Lipschitz 区域，问题就复杂得多了。事实上这时算子 K 在 $L^2(\partial D)$ 可以不是紧的。1977年 Dahlberg 通过对调和测度的估计，证明了：存在 $\varepsilon>0$(ε 可依赖于 D)，使得问题(D)对 $L^p(\partial D)$ $(2-\varepsilon<p<\infty)$ 可解。但这种方法不能用到问题(N)，也不能推广到方程组。而且，用调和测度的方法得不到解的表达式。

算子 K 实质上与 Calderón-Zygmund 算子是相类似的。应用研究 Calderón-Zygmund算子（其中包括 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子)的方法，Jerison 与 Kenig 首先证明

$$\|N(K(g))\|_2\leqslant C\|g\|_2,$$

其中

$$N(u)(x)=\sup_{y\in\Gamma(x)}|u(y)|,$$

$\Gamma(x)$ 表示以 $x\in\partial D$ 为顶点的内锥．同时

$$\|K(g)\|_2\leqslant C\|g\|_2。$$

以后，Kenig 在 Lipschitz 边界引入原子 Hardy 空间，通过 H^1 估

计以及H^1与L^2的内插和对偶推理，把上述两个估计推广到了L^p。

1982年 Verchota 绕过K的紧性，应用连续性原理，得到了算子T的可逆性。最后 Dahlberg 与Kenig证明了下面的结果：

(i) 对每个 Lip 区域D，存在$\varepsilon>0$，使得对任意$f\in L^p(\partial D, d\sigma)$，$2-\varepsilon<p<\infty$，(D)问题有唯一解$u$，它可以用双层位势表出；

(ii) 对每个 Lip 区域D，存在$\varepsilon>0$,使得对任意$f\in L^p(\partial D, d\sigma)$，$1<p<2+\varepsilon$，(N) 问题有唯一解，并且它可以用单层位势表出。

有例子表明，上述结果已经是最好的可能了。

这些结果，不仅对很一般的椭圆方程成立，还可以推广到方程组。

参阅[K3]，那里有系统的文献索引．也可参看[H7]。

从 Lipschitz 区域边值问题的彻底解决，可以看到Hardy 空间理论与 Calderón-Zygmund 算子理论的重要作用。

6．运用对偶定理，由 § 7.1中定理 1.4 容易得到 Calderón-Zygmund 算子的 BMO 有界定理：若$T\in \mathrm{CZO}(\gamma)$，$T(1)=0$，则$T$是BMO 到 BMO 有界的。

王斯雷曾对g函数

$$g(f)(x)=\int_0^\infty |\nabla u(x,t)|^2 t\, dt$$

(其中$u=P_t*f$)证明了，若$f\in \mathrm{BMO}$，则要么$g(f)(x)$几乎处处为∞，要么$g(f)(x)$几乎处处取有限值，且

$$\|g(f)\|_*\leqslant C\|f\|_*.$$

韩永生、D.Kurtz、姚璧芸分别把这结果推广到面积积分$S(f)(x)$与$g_\lambda(f)(x)$。施咸亮与 Torchinsky 把这结果推广到向量值函数的情形．在第 1 章我们曾证明过,$g(f)$与$S(f)$实质上是Calderón-Zygmund 算子．因此，上述这些结果，或者是从经典的角度，详

尽解释了上述 Calderón-Zygmund 算子 BMO 有界定理的含义，或者是推广了这个定理。参阅[W]，[H4]，[Y1]，[Ku]，[ST]。

7．$T(1)$定理中 CZK 的条件可以减弱．设$T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$连续线性，其分布核$K$满足条件

$$\int_{r\leqslant|x-y|<2r}|K(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant C,$$

$$\int_{r\leqslant|x-y|<2r}|K(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant C,$$

$$\int_{2^k r\leqslant|x-y|<2^{k+1}r}|K(x+u,y+v)-K(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_k,$$

$$\int_{2^k r\leqslant|x-y|<2^{k+1}r}|K(x+u,y+v)-K(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant\varepsilon_k,$$

当$|u|+|v|<r$，对任意$r>0$，而且$\sum k\varepsilon_k<\infty$，则$T$可扩张为$L^2$有界算子的充分必要条件是$T(1)\in\mathrm{BMO}$，$T^*(1)\in\mathrm{BMO}$，$T\in\mathrm{WBP}$。这结果是属于 Meyer 的。

能否把$T(1)$定理的分布核条件减弱为

$$|K(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^n},$$

$$\int_{|x-y|\geqslant 2|x-x'|}|K(x,y)-K(x',y)|\mathrm{d}y\leqslant C,$$

$$\int_{|x-y|\geqslant 2|y-y'|}|K(x,y)-K(x,y')|\mathrm{d}x\leqslant C,$$

这仍然是一个没有解决的问题。

8．能否用其它函数代替$T(1)$定理中的函数 1，而得到新的L^2有界性准则？G.David，J.-L.Journé与S.Semmes 引进了两类新的函数。

称有界函数b为伪增长的(pseudo-accretive)，如果存在$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{C}$的函数族$P_k(x,y)$及常数$C>0$，$\alpha>0$，使得对任意$x,x'$，

y, y'，有

$$P_k(x,y)=0,\quad \text{当} |x-y|\geqslant C2^{-k};$$

$$\|P_k\|_\infty\leqslant C2^{kn};$$

$$|P_k(x,y)-P_k(x,y')|\leqslant C2^{k(n+\alpha)}|y-y'|^\alpha;$$

$$|P_k(x,y)-P_k(x',y)|\leqslant C2^{k(n+\alpha)}|x-x'|^\alpha;$$

$$\int_{R^n} P_k(x,y)\mathrm{d}x=1,\quad \int_{R^n} P_k(x,y)\mathrm{d}y=1;$$

$$\frac{1}{C}\leqslant\int_{R^n} P_k(x,y)b(y)\mathrm{d}y\leqslant C。$$

称有界函数 b 为仿增长的(para-accretive)，如果存在$\varepsilon>0$，使得对任意 $Q\subset R^n$，有子方块 $I\subset Q$，满足

$$|m_I(b)|\geqslant\varepsilon,$$

其中$m_I(b)$是 b 在 I 的平均。

显然，如果 b 与 $1/b$ 都是正的有界实函数，则 b 既是伪增长的，也是仿增长的。

另外，引入函数空间

$$\mathscr{C}_0^\eta(\boldsymbol{R}^n)=\left\{f\,|\,\text{紧支集，}\ \|f\|_\eta=\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\eta}<\infty\right\}.$$

算子 M_b 表示用函数 b 作乘法. 空间 $b\mathscr{C}_0^\eta(\boldsymbol{R}^n)$表示 M_b 作用在 $\mathscr{C}_0^\eta(\boldsymbol{R}^n)$的像空间。

David-Journé-Semmes的结果如下：设 b_1与b_2 是两个伪增长函数（或仿增长函数），$T\in\mathrm{CZK}(\gamma)$，且T：$b_1\mathscr{C}_0^\eta\to[b_2\mathscr{C}_0^\eta]'$对某个$\eta>0$。则$T$可扩张为 L^2 有界算子的充分必要条件是 $T(b_1)\in\mathrm{BMO}$，$T^*(b_2)\in\mathrm{BMO}$，$M_{b_2}TM_{b_1}\in\mathrm{WBP}$。

通常把这个结果称为$T(b)$定理。参看[DJS]，[M6]。

第十一章　乘积空间上的H^p理论

前面研究的 H^p 空间，是对自变量的单参数展缩变换 $x\to\delta x$ $(\delta>0)$不变的。例如，取$f_\delta(x)=\delta^{-n/p}f\left(\frac{x}{\delta}\right)$，则 $\|f_\delta\|_{H^p(R^n)}=\|f\|_{H^p(R^n)}$。事实上，这并不奇怪，因为刻画 H^p 空间的极大函数

$$\varphi^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|(\varphi_t*f)(y)|,$$

就是通过单参数展缩变换 $\varphi_t(\cdot)=\frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$定义的。本章要考虑的是在多参数展缩变换$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(\delta_1x_1,\delta_2x_2,\cdots,\delta_nx_n)$下不变的 H^p 空间，它对应于乘积空间上的 H^p 空间。它同前面讲的 H^p 空间有着本质上的区别。

为了了解它们间的区别，我们看一个简单例子。对应于单参数展缩变换的一种极大算子是 Hardy-Littlewood 极大算子

$$M(f)(x)=\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x+y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中 Q 是以原点为中心的任意方体。我们知道，$M(f)$是(p,p)型与弱(1,1)型的。对应于多参数展缩变换的相应的极大函数是强极大函数

$$M_s(f)(x)=\sup_R\frac{1}{|R|}\int_R|f(x+y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中 R 是包含原点的长方体。$M_s(f)$与 $M(f)$有很大的区别。例如，它虽然仍是(p,p)型的，但已不是弱(1,1)型的了。代替弱(1,1)型，我们只能得到：设 f 支于 $\boldsymbol{R}^n$ 的单位立方体 Q_0，则

$$|\{x| \in Q_0,\ M_s(f)(x)>\lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L(\log L)^{n-1}(Q_0)}. \quad (*)$$

这就是所谓的 Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund 不等式。M_s 的 (p,p) 型($p>1$)与($*$)的证明都十分简单，只要用一维的 Hardy-Littlewood 极大函数进行简单迭代即可。

单参数与多参数的区别，反映到 H^p 空间，就是乘积空间的 H^p 空间的原子不能简单地用支于长方体的函数来定义，或者等价地说，H^1 的对偶空间 BMO 或 Carleson 测度都不能简单地用长方体来定义。这就涉及开集如何用长方体覆盖的十分复杂的几何图像。本章介绍乘积空间的 H^p 空间的实变刻画、原子分解以及对偶空间。由于它的复杂性，因而理论还不是十分完美的。

§11.1 乘积空间上的H^p空间的实变刻画

为简单起见，我们仅讨论 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 上的 H^p 空间。对一般的情形 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$，可以作类似的处理。对 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 所对应的展缩变换是双参数的，即$(x_1,x_2)\to(\delta_1x_1,\delta_2x_2)$。类似于单参数的情形，$H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$既可以看作某类在 $\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2$ 的双调和函数，也可以考虑其边值，看作 $\boldsymbol{R}^2$ 上具有一定性质的广义函数。

记 $x=(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2$，$\Gamma(x)=\Gamma(x_1)\times\Gamma(x_2)$，其中 $\Gamma(x_i)=\{(y_i,t_i)|\in\boldsymbol{R}_+^2,\ |y_i-x_i|<t_i\}$，$i=1,2$。

设 $u(x,t)$是 $\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2$ 的双调和函数，即它分别对(x_1,t_1)与(x_2,t_2)都是 $\boldsymbol{R}_+^2$ 上的调和函数。定义它的非切向极大函数为

$$u^*(x)=u^*(x_1,x_2)=\sup_{(y,t)\in\Gamma(x)}|u(y,t)|. \quad (1.1)$$

同时定义它的"面积积分"为

$$S^2(u)(x)=S^2(u)(x_1,x_2)=\iint_{\Gamma(x)}|\nabla_1\nabla_2u(y,t)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t. \quad (1.2)$$

定义1.1 我们称双调和函数 $u(y,t)\in H^p(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2)$，如果

$u^*(x)\in L^p(\boldsymbol{R}^2)$。

与单参数的情形一样，u^* 与 $S(u)$在 L^p 范数意义下是等价的。我们可以利用一元的结果通过迭代加以证明。

定理1.1 若 $S(u)\in L^p$，$0<p<\infty$，$\lim\limits_{\substack{t_1\to\infty\\ t_2\to\infty}} u(x,t)=0$，则$u^*\in L^p$，且

$$\|u^*\|_p\leqslant C_p\|S(u)\|_p,\qquad 0<p<\infty.$$

证明 首先，不妨设 u 是某个 f 的 Poisson 积分，因为与一维的情形类似，$H^2\cap H^p$ 在 H^p 是稠密的。其次，不妨设 $p>\frac{1}{2}$，否则用类似于 §3.2 中定理 2.5 的办法处理。注意到对每个变量取Hilbert变换并不改变面积积分，我们可以把 f 分解为

$$f=f_{++}+f_{+-}+f_{-+}+f_{--},$$

其中 $\hat{f}_{++}$支于第一卦限：$\xi_1>0$，$\xi_2>0$，$\hat{f}_{+-}$支于第二卦限：$\xi_1>0$，$\xi_2<0$ 等等。至多通过反射变换，便可假设 $f_{\pm\pm}$ 是解析的。因此不妨假设 f 在 $\boldsymbol{R}^2_+\times\boldsymbol{R}^2_+$ 解析。用一维的推理方法，知存在$\alpha<p$，使得$|u(y,t)|^\alpha$ 是下调和函数，并且存在最小调和控制，它是$|f|^\alpha\in L^{p/\alpha}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$的二重 Poisson 积分，从而

$$u^*(x)^\alpha\leqslant M(|f|^\alpha)\in L^{p/\alpha}(\boldsymbol{R}^2),$$

故

$$\|u^*\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

剩下来的只是要证明$\|f\|_p\leqslant C_p\|S(u)\|_p$。我们通过单参数的结果迭代进行。令 Q_{t_j} 表示算子 $f\to t_j\nabla_j u(x_j,t_j)$，算子的核也同样用 Q_{t_j} 表示。例如

$$Q_{t_1}f(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1-y_1,x_2)Q_{t_1}(y_1)\mathrm{d}y_1,$$

这时

$$[S(u)(x)]^2=\iint_{\Gamma(x)}|Q_{t_2}Q_{t_1}f|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^2}.$$

考虑定义在 $\boldsymbol{R}^2$ 取值在 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma)=L^2\left(\Gamma(0),\ \frac{\mathrm{d}y_2\mathrm{d}t_2}{t_2^2}\right)$的函数

$$F(x_1,x_2)(y_2,t_2)=Q_{t_2}f(x_1,x_2+y_2).$$

从原来证明的推理不难看出，一维结果$\|S^1f\|_p\geqslant C_p\|f\|_p$ 对取值在 Hilbert 空间的函数 $F(x_1,x_2)$也成立，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|S^1(F)(x_1,x_2)|^p\mathrm{d}x_1\geqslant C_p\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x_1,x_2)|_{L^2(\Gamma)}^p\mathrm{d}x_1.$$

对 x_2 积分

$$\iint_{R^2}|S^1(F)(x_1,x_2)|^p\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\geqslant C_p\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x_1,x_2)|_{L^2(\Gamma)}^p\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{1.3}$$

再用一维的结果

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x_1,x_2)|_{L^2(\Gamma)}^p\mathrm{d}x_2=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{\Gamma(x_2)}|Q_{t_2}f(x_1,y_2)|^2\frac{\mathrm{d}y_2\mathrm{d}t_2}{t_2^2}\right\}^p\mathrm{d}x_2$$

$$\geqslant C_p\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^p\mathrm{d}x_2.$$

于是(1.3)的右方大于等于 $C_p\|f\|_p^p$。注意到

$$S^1(F)(x_1,x_2)=S(u)(x_1,x_2),$$

便证得定理1.1所要求的结果。

为了证明反向结果，我们采用一个与一维不同的新方法。

引理1.1 设 $\varphi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$，偶函数，$\operatorname{supp}\varphi\subset[-1,1]$，$\int_R\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，则存在 $\psi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$，$\operatorname{supp}\psi\subset[-1,1]$，$\int_R\psi(x)\mathrm{d}x=0$，使得对于 $u=P(f)$，有

$$\iint_{R_+^2}|\nabla u(x,t)|^2|g*\varphi_t(x)|^2t\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\left\{\int_R f^2(x)g^2(x)\mathrm{d}x+\iint_{R_+^2}u^2(x,t)|g*\psi_t(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\right\},$$

其中 C 与 f,g 无关。

若记 $P_t(f)=P(f)$，$Q_t(f)=t\nabla u(x,t)$，$\tilde{P}_t(f)=f*\varphi_t$，$\tilde{Q}_t(f)=f*\psi_t$。则定理断言，对 $Q_t,\tilde{P}_t$，存在 $\tilde{Q}_t$，使得

$$\iint_{R_+^2}Q_t(f)^2\tilde{P}_t(g)^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\left\{\int_R f^2g^2\mathrm{d}x+\iint_{R_+^2}P_t(f)^2\tilde{Q}_t(g)^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\right\}. \tag{1.4}$$

证明 由于 u 调和，$\Delta(u^2)=\nabla\nabla u^2=2|\nabla u|^2$。用 Green 公式

$$\begin{aligned}
2\iint_{R_+^2}|\nabla u|^2|g*\varphi_t|^2t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\iint_{R_+^2}(\nabla\nabla u^2)(g*\varphi_t)^2t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-\iint_{R_+^2}\nabla(u^2)\nabla(t(g*\varphi_t)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-2\iint_{R_+^2}u\nabla u\nabla(g*\varphi_t)^2t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad-2\iint_{R_+^2}u\frac{\partial u}{\partial t}(g*\varphi_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-4\iint_{R_+^2}u\nabla u(g*\varphi_t)\nabla(g*\varphi_t)t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad-2\iint_{R_+^2}u\frac{\partial u}{\partial t}(g*\varphi_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\mathrm{I}+\mathrm{II}.
\end{aligned}$$

显然

$$|\mathrm{I}|\leqslant 4\left(\iint_{R_+^2}u^2(g*\psi_t)^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}\left(\iint_{R_+^2}(\nabla u)^2(g*\varphi_t)^2t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

而

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\,\mathrm{II} &= \iint\limits_{R_+^2} u\frac{\partial u}{\partial t}(g*\varphi_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= -\iint\limits_{R_+^2} u\frac{\partial}{\partial t}u(g*\varphi_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad +\int_R u^2(x,0)g^2(x)\mathrm{d}x \\
&= -\iint\limits_{R_+^2} u\frac{\partial u}{\partial t}(g*\varphi_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad -\iint\limits_{R_+^2} 2u^2(g*\varphi_t)\frac{\partial}{\partial t}(g*\varphi_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad +\int_R f^2g^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\iint\limits_{R_+^2} u\frac{\partial u}{\partial t}(g*\varphi_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= -2\iint\limits_{R_+^2} u^2(g*\varphi_t)\frac{\partial}{\partial t}(g*\varphi_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad +\int_R f^2g^2\mathrm{d}x \\
&= 2A+\int_R f^2g^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
t\frac{\partial}{\partial t}(g*\varphi_t) = -\frac{x}{t}g*\varphi'_t,
$$

记 $\psi(x)=x\varphi(x)$，则

$$
\begin{aligned}
|A| &\leqslant \iint\limits_{R_+^2} u^2(g*\psi_t)(g*\varphi'_t)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\Bigg| \\
&\leqslant \iint\limits_{R_+^2} u^2(g*\psi_t)^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} + \iint\limits_{R_+^2} u^2(g*\varphi'_t)^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}.
\end{aligned}
$$

综合上述结果，便知存在 ψ 使引理1.1结论成立。

从证明过程不难看出，引理结论对 R_+^{n+1} 成立。下面看它到乘积空间的推广。

引理1.2 条件与符号类似于引理1.1，我们有

$$\iint\limits_{R_+^2\ R_+^2} (Q_t f)^2(\tilde{P}_t g)^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C\left\{ \iint\limits_{R_+^2\ R_+^2} (P_t f)^2(\tilde{Q}_t g)^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}\right.$$

$$+\int_{x_1\in R}\left(\iint\limits_{R_+^2} (P_{t_2} f)^2(\tilde{Q}_{t_2} g)^2 \frac{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}t_2}{t_2}\right)\mathrm{d}x_1$$

$$\left.+\int_{x_2\in R}\left(\iint\limits_{R_+^2} (P_{t_1} f)^2(\tilde{Q}_{t_1} g)^2 \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}t_1}{t_1}\right)\mathrm{d}x_2+\int_{R^2} f^2 g^2\mathrm{d}x\right\}.$$

证明 只需注意符号 $Q_t=Q_{t_1}Q_{t_2}$，$\tilde{P}_t=\tilde{P}_{t_1}\tilde{P}_{t_2}$，累次使用引理1.1便得所要求的结果。

定理1.2 若 $u\in H^p(R_+^2\times R_+^2)$，$0<p<\infty$，则 $S(u)\in L^p$，且

$$\|S(u)\|_p\leqslant C_p\|u^*\|_p.$$

证明 与一维相类似，我们不妨假设 $u^*(x)$ 是对应于更宽的锥的极大函数，即

$$u^*(x)=\sup_{(y,t)\in\Gamma_{10^{10}}(x)}|u(y,t)|,$$

其中 $\Gamma_{10^{10}}(x)=\{(y,t)|\in R_+^2\times R_+^2:|y_j-x_j|<10^{10}t_j,\ j=1,2\}$.

设 $u=P(f)$，$M_s(f)$ 表示 f 的强极大函数。

$$\int_{M_s(\chi_{u^*>\alpha})<\frac{1}{200}} S^2(u)(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \iint\limits_{R_+^2 \times R_+^2} |\nabla_1\nabla_2 u(y,t)|^2 \left|R(y,t)\cap\left\{M_s(\chi_{u^*>\alpha})<\frac{1}{200}\right\}\right| \mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \iint\limits_{R^*} |\nabla_1\nabla_2 u(y,t)|^2 t_1 t_2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t,$$

其中 $R(y,t)=\{(x_1,x_2)|\in \boldsymbol{R}^2: |x_1-y_1|<t_1, |x_2-y_2|<t_2\}$是以$(y_1,y_2)$为中心，以 $2t_1$，$2t_2$ 为边长的矩形，而 $R^*=\left\{(y,t)\,\middle|\,|R(y,t)\cap\{u^*>\alpha\}|<\frac{1}{200}|R(y,t)|\right\}$。取$\varphi(x)=1$，当$|x|\leqslant\frac{1}{3}$.

$g(x)=\chi_{\{u^*(x)>\alpha\}}(x)$。注意当$|R(y,t)\cap\{u^*>\alpha\}|<\frac{1}{100}|R(y,t)|$时，$g*\varphi_t(y)=\tilde{P}_t g(y)\geqslant C$,这里的$C$是某个正数。用引理1.2，有

$$\int_{M_s(\chi_{u^*>\alpha})<\frac{1}{200}} S^2(u)(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{C}\iint\limits_{R_+^2\times R_+^2} |\nabla_1\nabla_2 u(y,t)|^2 \tilde{P}_t(g)(y) t\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\left\{\iint\limits_{R_+^2\times R_+^2} u^2(y,t)\tilde{Q}_t(g)^2(y)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right.$$

$$+\int_R\iint_{R_+^2}(P_{t_2}f(y))^2(\tilde{Q}_{t_2}(g)(y))^2\frac{\mathrm{d}y_2\mathrm{d}t_2}{t_2}\mathrm{d}y_1$$

$$+\int_R\iint_{R_+^2}(P_{t_1}f(y))^2(Q_{t_1}g(y))^2\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}t_1}{t_1}\mathrm{d}y_2$$

$$\left.+\int_{R^2} f^2g^2\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.$$

考虑Ⅰ。如果 $\tilde{Q}_t(g)(y) \neq 0$，则对某个 $x \in R(y,t)$，$u^*(x) \leqslant a$，从而 $|u(y,t)| \leqslant a$。故

$$\mathrm{I} \leqslant a^2 \iint_{R_+^2 \times R_+^2} \tilde{Q}_t(g)^2(y) \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}$$

$$= a^2 \iint_{R_+^2 \times R_+^2} Q_t(1-g)^2(y) \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant Ca^2 \|1-g\|_2^2 \leqslant Ca^2 |\{u^* > a\}|.$$

对于Ⅱ，如果 $\tilde{Q}_{t_2}(g)(y) \neq 0$，则存在 x_2，使得 $|x_2 - y_2| < t_2$，而 $u^*(y_1, x_2) \leqslant a$。因此 $P_{t_2} f(y_1, y_2) \leqslant a$，故

$$\mathrm{II} \leqslant a^2 \int_R \int_{R_+^2} \tilde{Q}_{t_2}(g)^2(y) \frac{\mathrm{d}y_2 \mathrm{d}t_2}{t_2} \mathrm{d}y_1$$

$$= a^2 \int_R \int_{P_+^2} \tilde{Q}_{t_2}(1-g)^2(y) \frac{\mathrm{d}y_2 \mathrm{d}t_2}{t_2} \mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant Ca^2 \int_R \int_R [1 - g(y_1, y_2)]^2 \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant Ca^2 |\{u^* > a\}|.$$

对Ⅲ，有类似于Ⅱ的估计。而

$$\mathrm{IV} \leqslant \int_{u^*(x) \leqslant a} f^2(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_{u^*(x) \leqslant a} u^{*2}(x) \mathrm{d}x.$$

这样，我们证得

$$\int_{M_s(\chi_{u^* > a}) < \frac{1}{200}} S^2(u)(x) \mathrm{d}x \leqslant C\left(a^2 |\{u^* > a\}| + \int_{u^* \leqslant a} u^{*2}(x) \mathrm{d}x\right).$$

而另一部分，用强极大函数的(2.2)型，

$$\left|\left\{x \middle| M_s(\chi_{u^*>a}) > \frac{1}{200}\right\}\right| \leqslant (200)^2 \int_{R^2} M_s(\chi_{u^*>a})^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \int_{R^2} \chi^2_{u^*>a}(x)\mathrm{d}x \leqslant C|\{u^*>a\}|.$$

总合这两部分估计，便得到

$$|\{x|S(u)(x)>a\}| \leqslant C|\{u^*>a\}| + \frac{C}{a^2}\int_{u^*\leqslant a} u^{*2}(x)\mathrm{d}x,$$

再积分，便可得到定理1.2所要求的结果。

显然，用这里的方法，可以给出§4.2中定理2.2必要性的一个简单证明。

类似于单参数的情形，若 $u \in H^p(\boldsymbol{R}^2_+ \times \boldsymbol{R}^2_+)$，则当 $t_1 \to 0$，$t_2 \to 0$时，$u(x,t)$有广义函数的边值。全体这样的边值构成空间 $H^p(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R})$，它与 $H^p(\boldsymbol{R}^2_+ \times \boldsymbol{R}^2_+)$同构。用类似于单参数的方法，可以证明，$f \in H^p(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R})$，当且仅当

$$\varphi^*(f)(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma(x)} |(f * \varphi_t)(y)| \in L^p(\boldsymbol{R}^2),$$

其中 $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$，$\int \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$，$\varphi_t(x) = \frac{1}{t_1 t_2}\varphi\left(\frac{x_1}{t_1}, \frac{x_2}{t_2}\right)$。同样地，我们可以定义 S 函数。设 $\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$，且满足

$$\int_{\boldsymbol{R}} \psi(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 = 0, \qquad \int_{\boldsymbol{R}} \psi(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2 = 0.$$

则定义

$$S^2_\psi(f)(x) = \iint_{\Gamma(x)} |(f * \psi_t)(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^2}.$$

通过迭代(类似于定理1.1证明中那样)，可以证明，$f \in H^p(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R})$，当且仅当 $S_\psi(f) \in L^p(\boldsymbol{R}^2)$，且

$$\lim_{\substack{t_1\to\infty \\ t_2\to\infty}} f * \psi_t = 0.$$

§ 11.2 乘积空间上的H^p空间的原子刻画

对于一维的单参数 $H^p(\boldsymbol{R})$空间，下面几点反映的本质上是同一件事：

(1) Carleson 测度的特征 $\mu(\hat{I})\leqslant C|I|$，它保证了Carleson 不等式

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^2} P(f)^p(x)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}}|f|^p\mathrm{d}x$$

的成立，其中$p>1$。

(2) H^1 的对偶是 BMO 空间

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f(x)-f_I|\mathrm{d}x<\infty.$$

(3) $b\in$ BMO，当且仅当$|\psi_t * b|^2\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$是 Carleson 测度。

(4) H^1 的原子分解。

值得注意的是，这里的 Carleson 测度，BMO，原子，都是用区间定义的(对 $H^p(R^n)$，则是用方体定义的)。因此，对多参数的 H^p 空间，例如 $H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，自然会设想用矩形代替区间(方体)，来定义 Carleson 测度，BMO$(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$以及原子。1974 年，Carleson 举出反例，说明 $\mu(\hat{R})\leqslant C|R|$，其中 R 表示 $\boldsymbol{R}^2$ 的矩形，并不能保证

$$\iint_{\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2} P(f)^p(x)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant C_p\int_{\boldsymbol{R}^2}|f|^p\mathrm{d}x,\qquad p>1$$

成立。他的例子还说明，用矩形定义的 BMO，并不是$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$的对偶空间，从而也就不能简单地用支于矩形的原子来定义$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$. 也就是说，用矩形代替区间(方体)的设想是完全不正确的。正确的结果是通过开集．但开集又过于一般，不好应用，

结果还需通过矩形来分解开集。关于对偶空间的结果，我们将在§11.1叙述。本节先讲原子分解。

设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一个测度有限的开集。用 $m(\Omega)$ 记 Ω 中所有二进极大矩形的全体。用 $m_1(\Omega)$ 记 Ω 中所有沿 x_1 轴方向是极大的二进矩形的全体，即如果 $R\in m_1(\Omega)$，$R=I\times J\subset\Omega$，I 与 J 是二进区间。若 $S=I'\times J\subset\Omega$ 是另一个二进矩形，且 $R\subset S$，则 $R=S$。类似地，用 $m_2(\Omega)$ 表示 Ω 中所有沿 x_2 方向是极大的二进矩形的集合。令 $\tilde{\Omega}=\left\{x\in\boldsymbol{R}^2:\ M_s(\chi_\Omega)(x)>\frac{1}{2}\right\}$，其中 M_s 是强极大函数，χ_Ω 是 Ω 的特征函数。假定 $R=I\times J\in m_2(\Omega)$，记 $\gamma_1(R)=\gamma_1(R,\Omega)=\sup\frac{|l|}{|I|}$，其中上确界是对所有二进区间 l 取的：$I\subseteq l$，且 $l\times J\subseteq\tilde{\Omega}$。类似地记 $\gamma_2(R)=\gamma_2(R,\Omega)=\sup|S|/|J|$，其中上确界是对所有二进区间 S 取的：$J\subseteq S$ 且 $I\times S\subseteq\tilde{\Omega}$。

现在我们给出 $(p,2,s_1,s_2)$ 原子的定义。

定义2.1 设 $0<p\leqslant1$，s_1 是不小于 $\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 的最大整数，s_2 是不小于 $\left[m\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 的最大整数。我们称定义在 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ 上的函数 $a(x_1,x_2)$ 是一个 $(p,2,s_1,s_2)$ 原子，如果 a 满足下述条件：

(1) $\operatorname{supp} a\subseteq\Omega$，$\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 上的一个测度有限的开集；

(2) a 可以进一步分解

$$a=\sum_{R\in m(\Omega)}a_R,$$

其中 a_R 满足：

(i) $\operatorname{supp} a_R\subseteq 3R$；

(ii)

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}a_R(x_1,x_2)x_1^\alpha\,\mathrm{d}x_1=0,\quad \text{对一切 } x_2 \text{ 以及 } 0\leqslant|\alpha|\leqslant s_1,$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^m}a_R(x_1,x_2)x_2^\beta\,\mathrm{d}x_2=0,\quad \text{对一切 } x_2 \text{ 以及 } 0\leqslant|\beta|\leqslant s_2;$$

(3) $\|a\|_2^2 \leqslant |\Omega|^{1-2/p}$, $\sum\limits_{R \subset m(\Omega)} \|a_R\|_2^2 \leqslant |\Omega|^{1-2/p}$.

定义2.2

$$
\begin{aligned}
&H^{p,2,s_1,s_2}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m) \\
&\quad = \{f \mid \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m), f = \sum \lambda_j a_j,\ \text{其中 } a_i \text{ 是} \\
&\qquad (p,2,s_1,s_2)\text{原子},\ \sum |\lambda_j|^p < \infty\}.
\end{aligned}
$$

$$\|f\|_{H^{p,2,s_1,s_2}} = \inf\{(\sum |\lambda_j|^p)^{1/p}:\ \text{对一切分解} f = \sum \lambda_j a_j\}.$$

定理2.1 $f \in H^p(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m)$的充分必要条件是$f \in H^{p,2,s_1,s_2}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m)$，并且

$$\|f\|_{H^p} \sim \|f\|_{H^{p,2,s_1,s_2}}.$$

为简单起见，我们仅对 $n = m = 1$的情形加以证明，对一般的n, m，只需将证明稍作改动即可。

定理2.1必要性的证明 设 $f \in H^p(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R})$。我们用 H^p 的 S 函数刻画。取 $\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ 为偶函数，且满足

$$\operatorname{supp}\psi \subset \{x \in \boldsymbol{R}:\ |x| \leqslant 1\},$$

$$\int_R x^\alpha \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant s_0 = \left[\frac{1}{p} - 1\right],$$

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1.$$

$$\psi(x) = \psi(x_1)\psi(x_2).$$

这时

$$
\begin{aligned}
S(f)(x) &= S_\psi(f)(x) \\
&= \left(\iint_{\Gamma(x)} |f * \psi_t(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^2}\right)^{1/2} \in L^p(\boldsymbol{R}^2).
\end{aligned}
$$

令

$$\Omega_k = \{x \in \boldsymbol{R}^2:\ S(f)(x) > 2^k\},$$

$$\tilde{\Omega}_k=\left\{x\in \boldsymbol{R}^2:\ M_s(\chi_{\Omega_k})(x)>\frac{1}{2}\right\}.$$

对 $\boldsymbol{R}^2$ 的每个二进矩形 $R=I\times J$，记

$$\mathscr{A}(R)=\{(y,t)\in \boldsymbol{R}_+^2\times \boldsymbol{R}_+^2:\ (y_1,y_2)\in R,\\ |I|<t_1\leqslant 2|I|,|J|<t_2\leqslant 2|J|\},$$

$$\mathscr{R}_k=\left\{R:\ R\text{是二进矩形},\ |R\cap\Omega_k|\geqslant\frac{1}{2}|R|,\right.\\ \left.|R\cap\Omega_{k+1}|<\frac{1}{2}|R|\right\}.$$

显然，每个二进矩形仅属于一个 $\mathscr{R}_k$。这样

$$f(x)=\iint_{\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2} f(y,t)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\sum\iint_{\mathscr{A}(R)} f(y,t)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t},$$

其中 $f(y,t)=f*\psi_t(y)$，求和是对 $\boldsymbol{R}^2$ 的一切二进矩形进行。注意，这里的第一个等式成立是用了 Calderón表示定理。

令

$$a_k(x)=\frac{C}{2^k|\Omega_k|^{1/p}}\sum_{R\in\mathscr{R}_k} e_R(x),$$

$$\lambda_k=\frac{2^k|\Omega_k|^{1/p}}{C},$$

其中

$$e_R(x)=\iint_{\mathscr{A}(R)} f(y,t)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t},$$

C 是以后将要确定的充分小的常数。于是我们已得到$f=\sum\limits_k\lambda_k a_k$，且

$$\sum_k |\lambda_k|^p \leqslant C \sum_k 2^{kp} |\Omega_k| \leqslant C\|S(f)\|_p^p \quad C\|f\|_{H^p}^p.$$

剩下只需验证每一个 a_k 是$(p,2,s,s)$原子．首先，容易看出 supp $a_k \subset \widetilde{\Omega}_k$，$\widetilde{\Omega}_k$ 是一个测度有限的开集．其次，要说明 a_k 可以进一步分解．想法是对 e_R 再作适当的组合．对每个矩形 $R \in \mathscr{R}_k$，存在一个极大二进矩形 $\widetilde{R} \in m(\widetilde{\Omega}_k)$，使得 $R \subseteq \widetilde{R}$．对每一个 $S \in m(\widetilde{\Omega}_k)$，令

$$a_S = \frac{C}{2^k |\Omega_k|^{1/p}} \sum_{\widetilde{R}=S} e_R.$$

因此，$a_k(x) = \sum\limits_{S \in m(\widetilde{\Omega}_k)} a_S$．显然，$a_S$ 支于 $3S$ 上，其消失矩条件由 ψ 的消失矩条件直接得到．需要验证的是大小条件．对于a_k可类似于§5.1中定理1.3的证明进行估计：

$$\|a_k\|_2 = \sup_{\|b\|_2 \leqslant 1} \left| \int_{R^2} a_k(x) b(x) \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \sup_{\|b\|_2 \leqslant 1} \frac{C}{2^k |\Omega_k|^{1/p}} \sum_{R \in \mathscr{A}_k} \iint_{\mathscr{A}(R)} f(y,t) \tilde{b}(y,t) \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t},$$

其中 $\tilde{b}(y,t) = \int_{R^2} \psi_t(y-x) b(x) \mathrm{d}x$．因此

$$\|a_k\|_2 \leqslant \frac{C}{2^k |\Omega_k|^{1/p}} \left(\iint_{\bigcup\limits_{R \in \mathscr{A}_k} \mathscr{A}(R)} |f(y,t)|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/2}.$$

我们断言

$$\iint_{\bigcup\limits_{R \in \mathscr{A}_k} \mathscr{A}(R)} |f(y,t)|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t} \leqslant C 2^{2k} |\Omega_k|. \tag{2.1}$$

由此得

$$\|a_k\|_2^2 \leqslant C|\Omega_k|^{1-2/p} \leqslant |\tilde{\Omega}_k|^{1-2/p},$$

由 M_S 的(2,2)型可选取 C 与 a_k,Ω_k 无关而使上式成立。

下面来证明 $\sum\limits_{S\in m(\tilde{\Omega}_k)} \|a_S\|_2^2 \leqslant |\tilde{\Omega}_k|^{1-2/p}$。事实上，

$$\|a_S\|_2 = \sup_{\|h\|_2\leqslant 1} \left|\int_{R^2} a_S(x)h(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \sup_{\|h\|_2\leqslant 1} \left|\frac{C}{2^k|\Omega_k|^{1/p}} \sum_{\tilde{R}=S} \iint_{\mathscr{A}(R)} f(y,t)\tilde{h}(y,t)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right|$$

$$\leqslant \frac{C}{2^k|\Omega_k|^{1/p}}\left(\iint_{\bigcup\limits_{\tilde{R}=S}\mathscr{A}(R)} |f(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}.$$

根据断言(2.1)，便有

$$\sum_{S\in m(\tilde{\Omega}_k)} \|a_S\|_2^2 \leqslant \frac{C^2}{2^{2k}|\Omega_k|^{2/p}} \sum_{R\in\mathscr{A}_k} \iint_{\mathscr{A}(R)} |f(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant \frac{C^2C'}{|\Omega_k|^{2/p-1}} = |\Omega_k|^{1-2/p}.$$

现在我们回过头来证明断言(2.1)。显然

$$\int_{\tilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1}} S^2(f)(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \iint_{R_+^2\times R_+^2} |f(y,t)|^2|\{x\in\tilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1}:$$

$$|x_j-y_j|<10^{10}t_j,\ j=1,2\}|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}.$$

如果$(y,t)\in\bigcup_{R\in\mathscr{A}_k}\mathscr{A}(R)$，则

$$|\{x\in\widetilde{\Omega}_k\backslash\Omega_{k+1}:\ |x_j-y_j|<10^{10}t_j,\ j=1,2\}|\geqslant\frac{1}{2}t_1t_2.$$

所以

$$\int_{\widetilde{\Omega}_k\backslash\Omega_{k+1}}S^2(f)(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\iint_{\bigcup_{R\in\mathscr{A}_k}\mathscr{A}(R)}|f(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}.$$

而另一方面

$$\int_{\widetilde{\Omega}_k\backslash\Omega_{k+1}}S^2(f)(x)\,\mathrm{d}x\leqslant2^{2(k+1)}|\widetilde{\Omega}_k|\leqslant C2^{2k}|\Omega_k|,$$

断言(2.1)获证，从而定理2.1的必要性成立。

为证充分性，需要下面的引理。

引理2.1（Journé覆盖引理） 对任意$\delta>0$，存在常数C_δ，使得

$$\sum_{R\in m_2(\Omega)}|R|\gamma_1^{-\delta}(R)\leqslant C_\delta|\Omega|,\tag{2.2}$$

$$\sum_{R\in m_1(\Omega)}|R|\gamma_2^{-\delta}(R)\leqslant C_\delta|\Omega|\tag{2.3}$$

对一切开集$\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$成立，其中$C_\delta$与$\Omega$无关。

证明 根据对称性，只要证明(2.2)便足够了。我们先证明(2.2)的一个连续表示。对每个$(x_1,t_1)\in\boldsymbol{R}^2$，记

$$E_{x_1t_1}=\{x_2|(x_1-t_1,x_1+t_1)\times\{x_2\}\subseteq\Omega\}.$$

这是$\boldsymbol{R}$的开集。设它的构成区间为$I^l_{x_1t_1}$，即$E_{x_1t_1}=\bigcup_l I^l_{x_1t_1}$。

令

$$t_1^l=\inf\left\{t'_1\geqslant t_1\,\middle|\,\frac{|E_{x_1t'_1}\cap I^l_{x_1t_1}|}{|I^l_{x_1t_1}|}\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

我们来证明

$$\iint\sum_l|I^l_{x_1t_1}|\left(\frac{t_1}{t_1^l}\right)^\delta\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}t_1}{t_1}\leqslant C_\delta|\Omega|. \qquad (2.4)$$

上式的积分区域在证明中自明.

事实上，(2.4)的左边等于

$$\iint\sum_l\int_{t'_1>t_1^l}|I^l_{x_1t_1}|\left(\frac{t_1}{t'_1}\right)^{\delta-1}\frac{\mathrm{d}t'_1}{t_1'^2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}x_1.$$

注意，当$t'_1>t_1^l$时，$|E_{x_1t'_1}\cap I^l_{x_1t_1}|\leqslant\frac{1}{2}|I^l_{x_1t_1}|$，即$|I^l_{x_1t_1}\setminus E_{x_1t'_1}|>\frac{1}{2}|I^l_{x_1t_1}|$. 因此，上式不大于

$$\iint\sum_l\int_{I^l_{x_1t_1}\setminus E_{x_1t'_1}}2\mathrm{d}x_2\left(\frac{t_1}{t'_1}\right)^{\delta-1}\frac{\mathrm{d}t'_1}{t_1'^2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}x_1. \qquad (2.5)$$

当$(x_1,x_2)\in\Omega$时，记

$$T_1(x_1,x_2)=\sup\{s_1\,|\,(x_1-s_1,x_1+s_1)\times\{x_2\}\subseteq\Omega\}.$$

若$x_2\in I^l_{x_1t_1}\setminus E_{x_1t'_1}$，则$t_1\leqslant T_1(x_1,x_2)\leqslant t'_1$. 故(2.5)小于等于

$$\begin{aligned}&2\iint_{(x_1,x_2)\in\Omega}\int_{t_1\leqslant T_1\leqslant t'_1}\left(\frac{t_1}{t'_1}\right)^{\delta-1}\frac{\mathrm{d}t'_1}{t_1'^2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=2\iint_{(x_1,x_2)\in\Omega}\left(\int_{T_1}^\infty\frac{\mathrm{d}t'_1}{t_1'^{1+\delta}}\right)\left(\int_0^{T_1}t_1^{\delta-1}\mathrm{d}t_1\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=C_\delta|\Omega|.\end{aligned}$$

这就是我们要证的(2.4).

现在回到(2.2)的证明. 记

$$\tau_1^l=\sup\{t'_1\geqslant t_1\,|\,(x_1-t'_1,x_1+t'_1)\times I^l_{x_1t_1}\subset\tilde{\Omega}\},$$

则需要证明的(2.2)可以写成

$$\sum_{t_1,x_1}\sum_{l}|I^l_{x_1t_1}|t_1\left(\frac{t_1}{\tau^l_1}\right)^\delta\leqslant C_\delta|\Omega|.$$

注意到 t^l_1 可以表为

$$t^l_1=\sup\left\{t'_1\geqslant t_1\,\Big|\,|E_{x_1t'_1}\cap I^l_{x_1t_1}|>\frac{1}{2}|I^l_{x_1t_1}|\right\},$$

便知 $t^l_1\leqslant\tau^l_1$。因此，我们只要证明

$$\sum_{x_1,t_1}\sum_{l}|I^l_{x_1t_1}|t_1\left(\frac{t_1}{t^l_1}\right)^\delta\leqslant C_\delta|\Omega| \tag{2.6}$$

就足够了。设 Ω 在 x_1 的投影包含在最小二进区间$[a,b]$中，则上式中的求和是对满足下面条件的所有 x_1,t_1 进行的：

$$t_1=2^j\leqslant\frac{1}{2}(b-a),\ x_1=\frac{i}{2^k},\quad a<\frac{i}{2^k}<b,\quad i,j,k\text{ 是整数。}$$

注意到涉及的被积函数都是幂函数，在所积分的区间都是单调的，便知(2.6)的左边被(2.4)左边的积分所控制。这样便证明了(2.6)，从而引理2.1证完。

定理2.1充分性的证明 我们只要对任意$(p,2,s,s)$原子，证明

$$\|S(a)\|_p\leqslant C, \tag{2.7}$$

其中 C 与 a 无关。因为如果(2.7)获证，则对 $f=\sum\lambda_ja_j$，其中a_j是$(p,2,s,s)$原子，$\sum|\lambda_j|^p<\infty$，有

$$\|S(f)\|^p_p\leqslant\sum|\lambda_j|^p\|S(a_j)\|^p_p\leqslant C^p\sum|\lambda_j|^p<\infty,$$

因此 $f\in H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，且$\|f\|_{H^p}\leqslant C_p\|f\|_{H^{p,2,s,s}}$.

设$a=\sum\limits_{R\subset m(\Omega)}a_R$。对每个$R=I\times J\in m(\Omega)$，令 l 是满足 $I\subset l$ 且 $l\times J\subset\tilde{\Omega}$ 的最大二进区间，S 是满足 $J\subset S$ 且 $l\times J\subset\tilde{\Omega}$的最大二进区间，其中 $\tilde{\Omega}=\left\{x\in\boldsymbol{R}^2:M_s(\chi_\Omega)>\frac{1}{2}\right\}$。记 $\tilde{R}=1000l\times S$，即与 $l\times S$ 同心，边长分别扩大1000倍的矩形。由强极大函数的

(2,2)型，知$|\cup\tilde{R}|\leqslant C|\tilde{\tilde{\Omega}}|\leqslant C|\tilde{\Omega}|\leqslant C|\Omega|$. 因此

$$\int_{\cup\tilde{R}} S^p(a)(x)\mathrm{d}x\leqslant|\cup\tilde{R}|^{1-\frac{p}{2}}\left(\int_{R^2} S^2(a)(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant C|\Omega|^{1-\frac{p}{2}}\|a\|_2^p\leqslant C|\Omega|^{1-\frac{p}{2}}|\Omega|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p}=C,$$

其中用到了S函数是(2,2)型的. 剩下要证明的是

$$\int_{(\cup\tilde{R})^c} S^p(a)(x)\mathrm{d}x\leqslant C.$$

由于

$$\iint_{(\cup\tilde{R})^c} S^p(a)(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{R\in m(\Omega)}\iint_{\tilde{R}^c} S^p(a_R)(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{R\in m(\Omega)}\iint_{x_1\notin 100l} S^p(a_R)(x)\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{R\in m(\Omega)}\iint_{x_2\notin 100s} S^p(a_R)(x)\mathrm{d}x.$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

首先考虑$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$.

$$\iint_{x_1\notin 100l} S^p(a_R)(x)\mathrm{d}x=\int_{x_1\notin 100l}\int_{x_2\in 100S}+\int_{x_1\notin 100l}\int_{x_2\notin 100S}$$

$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

应用Hölder不等式与单参数的S函数的(2,2)型,

$$\mathrm{I}_1\leqslant C|S|^{1-\frac{p}{2}}\int_{x_1\notin 100l}\left(\int_R S^2(a_R)(x)\mathrm{d}x_2\right)^{p/2}\mathrm{d}x_1$$

$$\leqslant C|S|^{1-\frac{p}{2}}\int_{x_1\notin 100l}\|S(a_R)(x_1,x_2)\|_{L^2(\mathrm{d}x_2)}^p\mathrm{d}x_1.$$

设R的中心是(x_1^0, x_2^0)。注意到

$$
\begin{aligned}
&S[(a_R)(x_1,x_2)]^2\\
&=\int_0^\infty\int_R \chi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\left|\int_R a_R(\xi,x_2)\psi_{t_1}(y_1-\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\right|^2\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}t_1}{t_1^2}\\
&=\int_0^\infty\int_R \chi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\left|\int_R a_R(\xi,x_2)[\psi_{t_1}(y_1-\xi_1)\right.\\
&\qquad\left.-\psi_{t_1}(y_1-x_1^0)]\mathrm{d}\xi_1\right|^2\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}t_1}{t_1^2},
\end{aligned}
$$

其中$\chi(x)$是$|x|<1$的特征函数。由$x_1 \notin 100I$，$t_1>|x_1-y_1|$，$t_1>|y_1-\xi_1|$，$\xi_1\in I$，知$t_1\geqslant|x_1-x_1^0|/4$。因此

$$
\begin{aligned}
[S(a_R)(x_1,x_2)]^2&\leqslant C\int_{|x_1-x_1^0|/4}^\infty\int_R \chi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\\
&\quad\times\left|\int_R |a_R(\xi,x_2)|\frac{|\xi_1-x_1^0|}{t_1^2}\mathrm{d}\xi_1\right|^2\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}t_1}{t_1^2}\\
&\leqslant C\frac{|I|^2}{|x_1-x_1^0|^4}\left(\int_R |a_R(\xi_1,x_2)|\mathrm{d}\xi_1\right)^2\\
&\leqslant C\frac{|I|^3}{|x-x_1^0|^4}\|a_R(x_1,x_2)\|^2_{L^2(\mathrm{d}x_1)}.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1&\leqslant C|J|^{1-\frac{p}{2}}|I|^{\frac{3}{2}p}\|a_R\|_2^p\int_{x_1\notin 100I}\frac{\mathrm{d}x_1}{|x_1-x_1^0|^{2p}}\\
&\leqslant C|R|^{1-\frac{p}{2}}\gamma_1(R)^{1-2p}\|a_R\|_2^p.
\end{aligned}
$$

对于I_2，考虑

$$
\begin{aligned}
S^2(a_R)(x_1,x_2)=&\iint_{R_+^2\times R_+^2}\chi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\chi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\\
&\times\left|\int_{R^2} a_R(\xi_1,\xi_2)\psi_{t_1}(y_1-\xi_1)\psi_{t_2}(y_2-\xi_2)\mathrm{d}\xi\right|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^2}
\end{aligned}
$$

$$= \iint_{R_+^2 \times R_+^2} \chi\left(\frac{x_1 - y_1}{t_1}\right)\chi\left(\frac{x_2 - y_2}{t_2}\right)$$

$$\times \left|\int_{R^2} a_R(\xi_1, \xi_2)[\psi_{t_1}(y_1 - \xi_1) - \psi_{t_1}(y_1 - x_1^0)]\right.$$

$$\left.\times [\psi_{t_2}(y_2 - \xi_2) - \psi_{t_2}(y_2 - x_2^0) \mathrm{d}\xi\right|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^2}.$$

注意到 $x_1 \notin 100l$，$x_2 \notin 100S$，以及 $t_j \geqslant |x_j - y_j|, t_j > |y_j - \xi_j|$，$j = 1, 2$，知 $t_1 \geqslant |x_1 - x_1^0|/4, t_2 \geqslant |x_2 - x_2^0|/4$。因此

$$S^2(a_R)(x_1, x_2) \leqslant 4 \int_{|x_1 - x_1^0|/4}^{\infty} \int_{|x_2 - x_2^0|/4}^{\infty} \chi\left(\frac{x_1 - y_1}{t_1}\right)\chi\left(\frac{x_2 - y_2}{t_2}\right)$$

$$\times \left|\int_{R^2} a_R(\xi_1, \xi_2) \frac{|\xi_1 - x_1^0|}{t_1^2} \frac{|\xi_2 - x_2^0|}{t_2^2} \mathrm{d}\xi\right|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$\leqslant C|R|^3 \frac{\|a_R\|_2^2}{|x_1 - x_1^0|^4 |x_2 - x_2^0|^4}.$$

故

$$\mathrm{I}_2 \leqslant C|R|^{\frac{3}{2}p} \|a_R\|_2^p \int_{x_1 \notin 100l} \int_{x_2 \notin 100S} \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2}{|x_1 - x_1^0|^{2p} |x_2 - x_2^0|^{2p}}$$

$$\leqslant C|R|^{1-p/2} \|a_R\|_2^p \gamma_1(R)^{1-2p}.$$

应用Hölder不等式，$(p, 2, s, s)$原子条件以及Journé覆盖引理，有

$$\mathrm{I} \leqslant \sum_{R \subset m(\Omega)} |R|^{1-p/2} \|a_R\|_2^p (\gamma_1(R))^{1-2p}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{R \subset m(\Omega)} \|a_R\|_2^2\right)^{p/2} \left[\sum_{R \subset m(\Omega)} |R| \gamma_1^{-\delta}(R)\right]^{1-p/2}$$

$$\leqslant C|\Omega|^{\frac{p}{2}-1} |\Omega|^{1-\frac{p}{2}} = C,$$

其中 $\delta=\frac{2(2p-1)}{2-p}>0$。

类似地，可以得到

$$\iint\limits_{x_2\notin 100S} S^p(a_R)(x)\mathrm{d}x\leqslant C|R|^{1-\frac{p}{2}}\|a_R\|_2^p\gamma_2^{\frac{1}{2}-2p}(R'),$$

其中 $R'=l\times g\in m_1(\tilde{\Omega})$ 且 $R\subset R'$。注意到，当$R_1\in m(\Omega)$，$R_2\in m(\Omega)$且 $R_1'=R_2'$ 时，则要么 $R_1\cap R_2=\varnothing$，要么 $R_1=R_2$。因此，对 $\delta>0$

$$\sum_{R\in m(\Omega)}|R|\gamma_2^{-\delta}(R',\tilde{\Omega})\leqslant\sum_{S\in m_1(\tilde{\Omega})}\Bigl(\sum_{R'=S}|R|\Bigr)\gamma_2^{-\delta}(S,\tilde{\Omega})$$

$$\leqslant\sum_{S\in m_1(\tilde{\Omega})}|S|\gamma_2^{-\delta}(S)\leqslant C|\tilde{\Omega}|\leqslant C|\Omega|.$$

故

$$\text{II}=\sum_{R\in m(\Omega)}\iint\limits_{x_2\notin 100S}S^p(a_R)(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\sum_{R\in m(\Omega)}|R|^{1-p/2}\|a_R\|_2^p\gamma_2(R',\tilde{\Omega})^{1-2p}$$

$$\leqslant C\Bigl(\sum_{R\in m(\Omega)}\|a_R\|_2^2\Bigr)^{p/2}\Bigl(\sum_{R\in m(\Omega)}|R|\gamma_2^{-\delta}(R',\tilde{\Omega})\Bigr)^{1-p/2}$$

$$\leqslant C|\Omega|^{p/2-1}|\Omega|^{1-p/2}=C,$$

其中 $\delta=\frac{2(2p-1)}{2-p}>0$。

当$p\leqslant 1/2$时，只需把证明稍加修改，即应用原子的高阶消失矩，得到 $S^1(a_R)$与 $S(a_R)$的更好一些的估计，便可证得所需要的结果。

定理2.1至此全部证完。

定理2.1告诉我们，乘积$H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$空间的原子的确较$H^p(\boldsymbol{R}^2)$的原子复杂得多。其中最重要的是原子的支集既不能是$\boldsymbol{R}^2$中的正方形，也不能是矩形。一个自然的问题是，如果只限制“原子”的支集是矩形，那么，具有什么样特征的空间具有这种“原子”分解？下面我们对$p=1$回答这个问题。

定义2.3 定义在$\boldsymbol{R}^2$上的可微函数$a(x_1,x_2)$被称为矩形原子，如果

(1) $\mathrm{supp}a\subset R=I\times J$，其中$I,J$是$\boldsymbol{R}$上的区间；

(2) $\left\|\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x_1^\alpha\partial x_2^\beta}\right\|_\infty\leqslant|I|^{-1-\alpha}|J|^{-1-\beta}$，$\alpha,\beta=0,1$；

(3)

$$\int_{\boldsymbol{R}}a(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1=0,\quad \text{对任意 } x_2\in\boldsymbol{R},$$

$$\int_{\boldsymbol{R}}a(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2=0,\quad \text{对任意 } x_1\in\boldsymbol{R}.$$

定义2.4 设$f\in L(\boldsymbol{R}^2)$。我们称

$$S_1(f)(x)=\iint_{\Gamma(x)}|f*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^2}$$

为f的广义S函数。

定理2.2 设$f\in L(\boldsymbol{R}^2)$，则$S_1(f)\in L(\boldsymbol{R}^2)$的充分必要条件是$f$有矩形原子分解，即$f=\sum\lambda_j a_j$，其中$a_j$是矩形原子，$\sum|\lambda_j|<\infty$。并且

$$\|S_1(f)\|_{L^1}\sim\inf\{\sum|\lambda_j|：\text{对所有可能的 } f=\sum\lambda_j a_j\}.$$

证明 充分性 只要证明，对每个矩形原子a，有

$$\|S_1(a)\|_1\leqslant C, \tag{2.8}$$

其中C与a无关。

容易看出

$$\|S_1(a)\|_1\leqslant\int_{\boldsymbol{R}^2}\chi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\chi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\int_{\boldsymbol{R}_+^2+\boldsymbol{R}_+^2}|a*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^2}\mathrm{d}x$$

$$= C\int_{R_+^2\times R_+^2}|a*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}.$$

我们把积分分成若干部分进行估计。不妨设 a 支在以原点为中心的矩形 $R=I\times J$ 上。为书写简便，也用 I,J 分别表示 I,J 的长度，即 $I=|I|,|J|=J$。把 $(t_1,t_2),(y_1,y_2)$ 各分成四部分

1：$0<t_1<I,\ 0<t_2<J$；　　2：$0<t_1<I,\ J<t_2<\infty$；

3：$I<t_1<\infty,\ 0<t_2<J$；　　4：$I<t_1<\infty,\ J<t_2<\infty$。

1：$|y_1|\leqslant 4I,\ |y_2|\leqslant 4J$；　　2：$|y_1|\leqslant 4I,\ |y_2|>4J$；

3：$|y_1|>4I,\ |y_2|\leqslant 4J$；　　4：$|y_1|>4I,\ |y_2|>4J$。

然后用12,23,34…等分别对应于它们的乘积，例如

$$12=\{0<t_1<I,0<t_2<J,|y_1|\leqslant 4I,|y_2|>4J\}$$

等等。这样

$$\int_{R_+^2\times R_+^2}|a*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}=\sum_{j=1}^4\sum_{i=1}^4\int_{ij}|a*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}.$$

注意到

$$a*\psi_t(y)=\int_{I\times J}a(\xi)\frac{1}{t_1}\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\frac{1}{t_2}\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)\mathrm{d}\xi,$$

以及 $\operatorname{supp}\psi\subset\{x:|x|\leqslant 1\}$，知

$$\int_{12}=\int_{13}=\int_{11}=0.$$

下面分别用 a,ψ 的消失矩条件。

$$\int_{11}=\int_{11}\left|\int_{I\times J}\frac{a(\xi_1,\xi_2)-a(\xi_1,y_2)-a(y_1,\xi_2)+a(y_1,y_2)}{(\xi_1-y_1)(\xi_2-y_2)}\right.$$

$$\left.\times\frac{\xi_1-y_1}{t_1}\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\frac{\xi_2-y_2}{t_2}\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)\mathrm{d}\xi\right|\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant\int_{11}\left\|\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}a\right\|_\infty$$

$$\times\int_{I\times J}\left|\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)\right|\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant\|x\psi(x)\|_1^2|I|^{-2}|J|^{-2}\int_{11}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\leqslant C,$$

其中 C 仅与 $\|x\psi\|_1$ 有关。

$$\int_{21}=\int_{21}\left|\int_{I\times J}\frac{a(\xi_1,\xi_2)-a(y_1,\xi_2)}{\xi_1-y_1}\cdot\frac{\xi_1-y_1}{t_1}\right.$$

$$\left.\times\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\frac{1}{t_2}\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)\mathrm{d}\xi\right|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant\int_{21}\|\psi\|_\infty\left\|\frac{\partial}{\partial\xi_1}a\right\|_\infty\int_{I\times J}\left|\frac{\xi_1-y_1}{t_1}\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\right|\frac{\mathrm{d}\xi_1}{t_1}\mathrm{d}\xi_2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t_2^2}$$

$$\leqslant\|\psi\|_\infty\|x\psi\|_1|I|^{-2}\int_{21}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t_2^2}=C.$$

类似地，可以得到积分在31上的估计。注意在 22 上，$|\xi_2|<J$，$|y_2-\xi_2|<t_2$，$|y_2|>4J$，故 $t_2>|y_2|/2$。于是

$$\int_{22}=\int_{22}\left|\int_{I\times J}\frac{a(\xi_1,\xi_2)-a(y_1,\xi_2)}{\xi_1-y_1}\frac{\xi_1-y_1}{t_1}\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{t_2}\left[\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)-\psi\left(\frac{y_2}{t_2}\right)\right]\mathrm{d}\xi\right|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant\int_{22}\|\psi'\|_\infty\left\|\frac{\partial}{\partial\xi_1}a\right\|_\infty$$

$$\times\int_{22}\int_{I\times J}\left|\frac{\xi_1-y_1}{t_1}\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\right||\xi_2|\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t_1t_2^3}$$

$$\leqslant C\int_0^I\int_{\substack{|y_1|<4I\\|y_2|>4J}}\int_{|y_2|/2}^{\infty}|I|^{-2}|J|^{-1}|J|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t_2^3}$$

$$\leqslant C|J|\int_{|y_2|>4J}\frac{\mathrm{d}y}{|y_2|^2}=C.$$

类似地可以估计在33,23,32,24,34上的积分。而

$$\int_{41}=\int_{41}\left|\int_{I\times J}a(\xi_1,\xi_2)\frac{1}{t_1}\psi_1\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\frac{1}{t_2}\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)\mathrm{d}\xi\right|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant\|\psi\|_\infty^2|I||J|\int_I^\infty\int_J^\infty\frac{\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}{t_1^2t_2^2}\leqslant C.$$

注意在43上，当$|y_1|>4I$时,$t_1>|y_1|/2$。故

$$\int_{43}=\int_{43}\left|\int_{I\times J}a(\xi_1,\xi_2)\left[\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\psi\left(\frac{y_1}{t_1}\right)\right]\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)\mathrm{d}\xi\right|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$\leqslant\|\psi'\|_\infty\|\psi\|_\infty\|a\|_\infty\int_{43}\int_{I\times J}|\xi_1|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t_1^3t_2^2}$$

$$\leqslant C|I||J|\int_{|y_1|>I/4}\int_{|y_1|/2}^\infty\frac{\mathrm{d}t_1\mathrm{d}y_1}{t_1^3}\int_J^\infty\frac{\mathrm{d}t_2}{t_2}=C.$$

类似地可得积分在42上的估计。

$$\int_{44}=\int_{44}\left|\int_{I\times J}a(\xi_1,\xi_2)\left[\psi\left(\frac{y_1-\xi_1}{t_1}\right)-\psi\left(\frac{y_1}{t_1}\right)\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\psi\left(\frac{y_2-\xi_2}{t_2}\right)-\psi\left(\frac{y_2}{t_2}\right)\right]\mathrm{d}\xi\right|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$\leqslant C\int_{|y_1|>4I}\int_{|y_1|/2}^\infty\frac{I|\mathrm{d}t_1\mathrm{d}y_1}{t_1^3}\int_{|y_2|>4J}\int_{|y_2|/2}^\infty\frac{|J|\mathrm{d}t_2\mathrm{d}y_1}{t_2^3}$$

$$=C.$$

这就证明了(2.8)。

必要性 设$f\in L(\boldsymbol{R}^2)$,$S_1(f)\in I(\boldsymbol{R}^2)$。对每一个$R=I\times J$,记$\tilde{R}=\{(y,t)\,|\,y\in R,\frac{1}{2}I<t_1\leqslant I,\ \frac{1}{2}J\leqslant t_2\leqslant J\}$。这样

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2} f*\psi_t(y)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\sum_{\tilde{R}}\int_{\tilde{R}} f*\psi_t(y)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\sum_{\tilde{R}}\lambda_{\tilde{R}}a_{\tilde{R}}(x),$$

其中

$$a_{\tilde{R}}(x)=\frac{\int_{\tilde{R}} f*\psi_t(y)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}}{81\int_{\tilde{R}}|f*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}}$$

$$\lambda_{\tilde{R}}=81\int_{\tilde{R}}|f*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}.$$

显然，每个 $a_{\tilde{R}}$ 满足矩形原子的条件(1),(3)．下面验证(2)．

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}a_{\tilde{R}}(x)}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\beta}}\right|$$

$$\leqslant\frac{\left|\int_{\tilde{R}} f*\psi_t(y)\frac{1}{t_1^{1+\alpha}}\psi^{(\alpha)}\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\frac{1}{t_2^{1+\beta}}\psi^{(\beta)}\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right|}{81\int_{\tilde{R}}|f*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}}$$

$$\leqslant\frac{1}{81}\left(\frac{1}{2}I\right)^{-1-\alpha}\left(\frac{J}{2}\right)^{-1-\beta}\leqslant\left(\frac{3}{2}I\right)^{-1-\alpha}\left(\frac{3}{2}J\right)^{-1-\beta}.$$

其中我们假设了$\|\psi^{(\alpha)}\|_\infty\leqslant 1$,这是允许的。另外

$$\sum_{\tilde{R}}|\lambda_{\tilde{R}}|=81\sum_{\tilde{R}}\int_{\tilde{R}}|f*\psi_t(y)|\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$=\frac{81}{4}\int_{\mathbf{R}^2}S_1(f)(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

定理2.2至此证完。

联系第九章的概念，我们可以看出 $S_1(f)\in L^1(\boldsymbol{R}^2)$，意味着 f 属于乘积空间上的 Besov 空间 $B_1^{0,1}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$。在平移变换与双参数展缩变换下保持范数不变的 Banach 空间中，$B_1^{0,1}$ 是最小的。可见 $B_1^{0,1}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$ 比 $H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$ 有更好的性质。定理2.2说明，可以分解为矩形原子之和，就是这些性质之一。

§11.3 算子在乘积空间上的 H^p 空间的作用

在单参数情形，H^p 空间的原子分解为研究算子在 H^p 空间的作用提供了便利的条件。其中，原子的支集为方体是简化计算的重要因素。但乘积空间上的 H^p 空间的原子，一般只支于开集上。这对研究算子在其上的作用是不方便的。不久前，R.Fefferman发现了一个原则，要证明一个 L^2 有界的线性算子在 H^p 空间的作用，只要看它在 H^p 长方体原子上的表现就可以了。

定义3.1 设 $0<p\leqslant 1$. 我们称定义在 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ 上的函数 $a(x_1,x_2)$ 是 $H^p(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$ 长方体 $(p,2,s)$ 原子，如果

(1) $\operatorname{supp} a\subset R=I\times J$，其中 I 与 J 分别是 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^m$ 上的方体；

(2) 对任意 $x_2\in\boldsymbol{R}^m$，当 $0\leqslant|\alpha|\leqslant s$，

$$\int_I a(x_1,x_2)x_1^\alpha\,\mathrm{d}x_1=0,$$

对任意 $x_1\in\boldsymbol{R}^n$，当 $0\leqslant|\alpha|\leqslant s$，

$$\int_J a(x_1,x_2)x_2^\alpha\,\mathrm{d}x_2=0,$$

其中 $s=s_p$ 是只依赖于 n,p 的整数；

(3) $\|a\|_2\leqslant|R|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$.

一般说来，当 p 变得很小时，s_p 会变得很大。

对任意长方体 R（也可以是方体，在一维时是区间），对 $\gamma>0$，用 $\tilde{R}_\gamma$ 表示与 R 同心边长放大了 γ 倍的长方体。

定理3.1 设 T 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$ 的有界线性算子。若存在 $\delta>0$，对任意 $H^p(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$ 长方体 $(p,2,s)$ 原子 a，有

$$\int_{(\tilde{R}_\gamma)^c}|T(a)|^p\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\leqslant C\gamma^{-\delta}$$

对一切 $\gamma\geqslant 2$ 成立，其中 R 是 a 的支集，则 T 是 $H^p(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$ 到 $L^p(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$ 的有界算子。

证明 为简单起见，我们只考虑 $n=m=1$ 的情形，一般情形可类似地进行。设 a 是 $H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$ 的任一个原子，支于开集 Ω。我们只要证明

$$\|T(a)\|_p\leqslant C \tag{3.1}$$

即可，其中 C 与 a 无关。

正如在定理2.1充分性证明中所作的那样，对任意 $R=I\times J\in m(\Omega)$，令 l 是包含 I 的最大二进区间，使得 $l\times J\subseteq\tilde{\Omega}$。再令 S 是包含 J 的最大二进区间，使得 $l\times S\subseteq\tilde{\tilde{\Omega}}=\{x\in\boldsymbol{R}^2:M_s(\chi_{\tilde{\Omega}})(x)>1/2\}$。记 $\tilde{R}=100l\times S$。由极大函数的性质知 $|\cup\tilde{R}|\leqslant C|\Omega|$。

先看

$$\int_{\cup\tilde{R}}|T(a)|^p\,\mathrm{d}x\leqslant|\cup\tilde{R}|^{1-\frac{p}{2}}\|T(a)\|_2^p\leqslant C|\cup\tilde{R}|^{1-\frac{p}{2}}\|a\|_2^p$$

$$\leqslant C|\Omega|^{1-\frac{p}{2}}|\Omega|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p}=C.$$

其次估计

$$\int_{(\cup\tilde{R})^c}|T(a)|^p\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{R\in m(\Omega)}\int_{x_1\notin 100l}|T(a_R)|^p\,\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{R\in m(\Omega)}\int_{x_2\notin 100S}|T(a_R)|^p\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

注意 $a_R/\|a_R\|_2|R|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ 是 $H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$ 长方形 $(p,2,s)$ 原子，根据定理的假设有

$$\int_{x_1\notin 100l}|T(a_R)|^p\,dx\leqslant C\|a_R\|_2^p|R|^{1-\frac{p}{2}}\gamma_1^{-\delta}(R),$$

因此，用 Journé 覆盖引理

$$\mathrm{I}\leqslant C\sum_{R\in m(\Omega)}\|a_R\|_2^p|R|^{1-\frac{p}{2}}\gamma_1^{-\delta}(R)$$

$$\leqslant C\left(\sum\|a_R\|_2^2\right)^{\frac{p}{2}}\left(\sum|R|\gamma^{-\delta'}(R)\right)^{1-\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant C|\Omega|^{\frac{p}{2}-1}|\Omega|^{1-\frac{p}{2}}=C.$$

完全重复定理2.1充分性证明中的推理（见第442页），有

$$\int_{x_2\notin 100S}|T(a_R)|^p\,dx\leqslant C\|a_R\|_2^p|R|^{1-\frac{p}{2}}\gamma_2^{-\delta}(R',\widetilde{\Omega}),$$

而

$$\sum_{R\in m(\Omega)}|R|\gamma_2^{-\delta'}(R',\widetilde{\Omega})\leqslant\sum_{S\in m_1(\widetilde{\Omega})}\left(\sum_{R'=S}|R|\right)\gamma_2^{-\delta'}(S,\widetilde{\Omega})$$

$$\leqslant\sum_{S\in m_1(\widetilde{\Omega})}|S|\gamma_2^{-\delta}(S,\widetilde{\Omega})$$

$$\leqslant C|\widetilde{\Omega}|\leqslant C|\Omega|,$$

故类似地

$$\mathrm{II}\leqslant\sum_{R\in m(\Omega)}\|a_R\|_2^p|R|^{1-\frac{p}{2}}\gamma_2^{-\delta}(R',\widetilde{\Omega})\leqslant C.$$

这就证明了(3.1)，从而定理3.1获证。

为了符号简单起见，记

$$f^*(x)=\varphi^*(f)(x)=\sup_{y\in\Gamma(x)}|f*\varphi_t(y)|.$$

我们进一步还可以得到

定理3.2 设T是$L^2(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$的有界线性算子。若存在$\delta>0$,对任意$H^p(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$长方体$(p,2,s)$原子$a$,有

$$\int_{(\tilde{R}_\gamma)^c}(T(a))^{*p}\mathrm{d}x\leqslant C\gamma^{-\delta}$$

对一切$\gamma\geqslant 2$成立，其中R是a的支集，则T是$H^p(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m)$到自身的有界算子。

证明 完全重复定理3.1的证明,只需用$(T(a))^*$代替那里的$T(a)$，便可得到$\|(T(a))^*\|_p\leqslant C$，即$\|T(a)\|_{H^p}\leqslant C$。

下面应用定理3.2,证明一类算子在乘积H^p空间上的有界性。为书写简单起见，我们只考虑$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$的情形。

考虑算子

$$T(f)(x_1,x_2)=\int_{R^2}K_1(x_1,y_1)K_2(x_2,y_2)f(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2, \tag{3.2}$$

其中要求由K_j定义的算子

$$T_j(f)(x)=\int_R K_j(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\quad j=1,2 \tag{3.3}$$

在$L^2(\boldsymbol{R})$是有界的，且$K_j(j=1,2)$满足

$$|K_j(x,y)-K_j(x,y')|\leqslant C|y-y'|^\varepsilon|x-y|^{-1-\varepsilon}, \tag{3.4}$$

当$|y-y'|<\frac{1}{2}|x-y|$,以及

$$|K_j(x,y)-K_j(x',y)|\leqslant C|x-x'|^\varepsilon|x-y|^{-1-\varepsilon}, \tag{3.5}$$

当$|x-x'|<\frac{1}{2}|x-y|$,且

$$\int_R K_j(x,y)\mathrm{d}x=0,\quad j=1,2. \tag{3.6}$$

自然，这里涉及算子的定义,都可像第十章对 Calderón-Zygmund 算子一样去理解。

定理3.3 设核$K_j(j=1,2)$满足条件(3.4)—(3.6),由K_j所

定义的算子 T_j 是 $L^2(\boldsymbol{R})$有界的，则由 (3.2) 定义的算子 T 是 $H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$到自身有界的，只要 $0<p\leqslant 1$ 且 p 充分接近于1.

证明 根据定理3.2，只需对任意支于矩形 $R=I\times J$ 的 H^p 矩形原子 a，证明

$$\int_{(\tilde{R}_\gamma)^c}(T(a))^{*p}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\leqslant C\gamma^{-\delta}$$

对某个 $\delta>0$ 与任意 $\gamma\geqslant 2$ 成立即可. 由于

$$\int_{(\tilde{R}_\gamma)^c}(T(a))^{*p}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$\leqslant\int_{x_1\notin\gamma I}(T(a))^{*p}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+\int_{x_2\notin\gamma J}(T(a))^{*p}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

只要证明右边的第一项被 $\gamma^{-\delta}$ 控制，因为第二项可以完全一样地处理.

不失一般性，可以假设 $\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$，$\operatorname{supp}\varphi\subset[-1,1]$，而 R 的中心在原点. 记

$$\int_{x_1\notin\gamma I}(T(a))^{*p}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\leqslant\int_{x_1\notin\gamma I}\int_{x_2\in 2J}(T(a))^{*p}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$+\int_{x_1\notin\gamma I}\int_{x_2\notin 2J}(T(a))^{*p}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

则

$$\mathrm{I}\leqslant C|J|^{1-p/2}\int_{x_1\notin\gamma I}\left(\int_{x_2\in 2J}(T(a))^{*2}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\right)^{p/2}\mathrm{d}x_1.$$

由于

$$(T(a))^*(x_1,x_2)$$

$$=\sup_{t_1,t_2>0}\left|\int_{R^2}T(a)(y_1,y_2)\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\varphi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{t_1t_2}\right|$$

$$\leqslant\sup_{t_2>0}\int_R\frac{1}{t_2}\varphi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\Big|$$

$$\times \sup_{t_1>0}\left|\int_R T(a)(y_1,y_2)\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)dy_1\right|dy_2$$

$$\leqslant CM\left(\sup_{t_1>0}\left|\int_R T(a)(y_1,y_2)\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)dy_1\right|\right),$$

其中M表示$\boldsymbol{R}^1$上的 Hardy-Littlewood 极大函数。因此

$$\mathrm{I}\leqslant C|J|^{1-p/2}\int_{x_1\notin\gamma I}\left\{\int_R \sup_{t_1>0}\left|\int_R T(a)(y_1,x_2)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)dy_1\right|^2 dx_2\right\}^{p/2}dx_1.$$

运用$\int_R T(a)(y_1,x_2)dy_1=0$，有

$$\int_R T(a)(y_1,x_2)\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)dy_1$$

$$=\int_R T(a)(y_1,x_2)\frac{1}{t_1}\left[\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)-\varphi\left(\frac{x_1}{t_1}\right)\right]dy_1$$

$$=\int_{|y_1|\leqslant 2|I|}+\int_{2|I|\leqslant y_1<\frac{1}{2}|x_1|}+\int_{\frac{1}{2}|x_1|<|y_1|<2|x_1|}+\int_{|y_1|\geqslant 2|x_1|}$$

$$=\sum_{j=1}^{4}P_j.$$

对P_1，由于$|y_1|\leqslant 2|I|\leqslant\frac{1}{2}|x_1|$，而$|x_1-y_1|<t_1$或$|x_1|<t_1$，总之有$t_1>\frac{1}{2}|x_1|$。因此

$$|P_1|\leqslant\frac{C}{|x_1|^2}\int_{|y_1|\leqslant 2|I|}|T(a)(y_1,x_2)||y_1|dy_1$$

$$\leqslant C\frac{|I|^{3/2}}{|x_1|^2}\left(\int_R|T(a)(y_1,x_2)|^2dy_1\right)^{1/2}.$$

对P_2，也有 $t_1>\frac{1}{2}|x_1|$，故

$$|P_2|\leqslant\frac{C}{|x_1|^2}\int_{2|I|\leqslant|y_1|\leqslant\frac{1}{2}|x_1|}|T(a)(y_1,x_2)||y_1|\mathrm{d}y_1.$$

注意到

$$|T(a)(y_1,x_2)|=\left|\int_I K_1(y_1,\xi_1)T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)\mathrm{d}\xi_1\right|$$

$$=\left|\int_I[K_1(y_1,\xi_1)-K_1(y_1,0)]T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)\mathrm{d}\xi_1\right|$$

$$\leqslant C\int_I\frac{|\xi_1|^\varepsilon}{|y_1|^{1+\varepsilon}}|T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|\mathrm{d}\xi_1$$

$$\leqslant C\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|y_1|^{1+\varepsilon}}\left(\int_I|T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2\mathrm{d}\xi_1\right)^{1/2},$$

选择 a 使得 $0<a<1$ 且 $\varepsilon+a>1$，便得到

$$|P_2|\leqslant\frac{C}{|x_1|^{2-a}}\int_{2|I|\leqslant|y_1|\leqslant\frac{1}{2}|x_1|}\frac{|I|^{1/2+\varepsilon}}{|y_1|^{1+\varepsilon}}|y_1|^{1-a}$$

$$\times\left(\int_I|T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2\mathrm{d}\xi_1\right)^{1/2}\mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant C\frac{|I|^{3/2-a}}{|x_1|^{2-a}}\left(\int_I|T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2\mathrm{d}\xi_1\right)^{1/2}.$$

对于P_3，当 $t_1\leqslant|x_1|$，有

$$|P_3|\leqslant\int_{\frac{1}{2}|x_1|\leqslant|y_1|\leqslant2|x_1|}|T(a)(y_1,x_2)|\left|\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\right|\mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant C\int_{\frac{1}{2}|x_1|\leqslant|y_1|\leqslant2|x_1|}\frac{|I|^{1/2+\varepsilon}}{|y_1|^{1+\varepsilon}}$$

$$\times\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 \mathrm{d}\xi_1\right)^{1/2} \left|\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\right| \mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant C\frac{|I|^{1/2+\varepsilon}}{|x_1|^{1+\varepsilon}}\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 \mathrm{d}\xi_1\right)^{1/2}.$$

当 $t_1>|x_1|$，则有

$$|P_3|\leqslant\frac{C}{|x_1|^2}\int_{\frac{1}{2}|x_1|\leqslant|y_1|\leqslant 2|x_1|}|T(a)(y_1,x_2)||y_1|\mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant\frac{C}{|x_1|^{2-\alpha}}\int_{\frac{1}{2}|x_1|\leqslant|y_1|\leqslant 2|x_1|}\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|y_1|^{1+\varepsilon}}$$

$$\times\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 \mathrm{d}\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}|y_1|^{1-\alpha}\mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant\frac{C|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}}\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 \mathrm{d}\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

最后

$$|P_4|\leqslant\frac{C}{|x_1|^2}\int_{|y_1|>2|x_1|}|T(a)(y_1,x_2)||y_1|\mathrm{d}y_1$$

$$\leqslant\frac{C|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}}\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 \mathrm{d}\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

综合起来，便得到

$$\sup_{t_1>0}\left|\int_R T(a)(y_1,x_2)\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\mathrm{d}y_1\right|$$

$$\leqslant C\left\{\frac{|I|^{\frac{3}{2}}}{|x_1|^2}\left(\int_R |T(a)(y_1,x_2)|^2 \mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$+\left(\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}}+\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|x_1|^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$\times\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}\Big\}.$$

由于 p 充分接近于 1，我们可以选择 α，使得 $0<\alpha<1, \varepsilon+\alpha>1$，

$p>\frac{1}{1+\varepsilon}$ 且 $(2-\alpha)p>1$。这样便有

$$\mathrm{I}\leqslant C|J|^{1-\frac{p}{2}}\int_{x_1\notin\gamma I}\left[\int_R \frac{|I|^3}{|x_1|^4}\left(\int_R |T(a)(y_1,x_2)|^2 dy_1\right)dx_2\right]^{\frac{p}{2}}dx_1$$

$$+C|J|^{1-\frac{p}{2}}\int_{x_1\notin\gamma I}\left[\int_R \frac{|I|^{1+2\varepsilon}}{|x_1|^{2+2\varepsilon}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 d\xi_1\right)dx_2\right]^{\frac{p}{2}}dx_1$$

$$+C|J|^{1-\frac{p}{2}}\int_{x_1\notin\gamma I}\left[\int_R \frac{|I|^{3-2\alpha}}{|x_1|^{4-2\alpha}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_I |T_2(a)(\xi_1,\cdot)(x_2)|^2 d\xi_1\right)dx_2\right]^{\frac{p}{2}}dx_1$$

$$\leqslant C|J|^{1-\frac{p}{2}}\|a\|_2^{\frac{p}{2}}\Big\{\int_{x_1\notin\gamma I}\left(\frac{|I|^{\frac{3}{2}p}}{|x_1|^{2p}}+\frac{|I|^{(\frac{3}{2}-\alpha)p}}{|x_1|^{(2-\alpha)p}}\right.$$

$$\left.+\frac{|I|^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)p}}{|x_1|^{(1+\varepsilon)p}}\right)dx_1$$

$$\leqslant C\gamma^{-\delta}|R|^{1-\frac{p}{2}}|R|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p}=C\gamma^{-\delta},$$

其中 $\delta=\min\{2p-1,(2-\alpha)p-1,(1+\varepsilon)p-1\}$。

为估计 Ⅱ，设 $x_1\notin\gamma I, x_2\notin 2J$。记

$$I_1=\{|y_1|\leqslant 2|I|\},\quad I_2=\left\{2|I|<|y_1|\leqslant\frac{1}{2}|x_1|\right\},$$

$$I_3=\left\{\frac{1}{2}|x_1|\leqslant|y_1|\leqslant 2|x_1|\right\},\quad I_4=\{|y_1|\geqslant 2|x_1|\},$$

$$J_1=\{|y_2|\leqslant 2|J|\},\quad J_2=\left\{2|J|\leqslant|y_2|\leqslant\frac{1}{2}|x_2|\right\},$$

$$J_3=\left\{\frac{1}{2}|x_2|\leqslant|y_2|\leqslant 2|x_2|\right\},\quad J_4=\{|y_2|>2|x_2|\},$$

$$R_{ij}=I_i\times J_j.$$

这样

$$\int_{R^2}T(a)(y_1,y_2)\frac{1}{t_1t_2}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\varphi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$=\int_{R^2}T(a)(y_1,y_2)\frac{1}{t_1t_2}\left[\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)-\varphi\left(\frac{x_1}{t_1}\right)\right]$$

$$\times\left[\varphi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)-\varphi\left(\frac{x_2}{t_2}\right)\right]\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$$

$$=\sum_{i,j=1}^{4}\int_{R_{ij}}=\sum_{i,j=1}^{4}P_{ij}.$$

显然

$$|P_{11}|\leqslant\frac{C}{|x_1|^2|x_2|^2}\int_{\substack{|y_1|\leqslant 2|I|\\|y_2|\leqslant 2|J|}}|T(a)(y_1,y_2)||y_1y_2|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$\leqslant C\frac{|R|^{3/2}}{|x_1|^2|x_2|^2}\|T(a)\|_2\leqslant C\frac{|R|^{3/2}}{|x_1|^2|x_2|^2}\|a\|_2.$$

对P_{22}，选择 α 如前，有

$$|P_{22}|\leqslant\frac{C}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}$$

$$\times\int_{R_{22}}|T(a)(y_1,y_2)||y_1|^{1-\alpha}|y_2|^{1-\alpha}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2.$$

由于当$|y_1|>2|I|$，$|y_2|>2|J|$时，

$$|T(a)(y_1,y_2)| = \left|\int_{R^2}[K_1(y_1,\xi_1) - K_1(y,0)]\right.$$

$$\left.\times[K_2(y_2,\xi_2) - K_2(y_2,0)]a(\xi_1,\xi_2)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\right|$$

$$\leqslant C\int_{R^2}\frac{|\xi_1|^\varepsilon}{|y_1-\xi_1|^{1+\varepsilon}}\frac{|\xi_2|^\varepsilon}{|y_2-\xi_2|^{1+\varepsilon}}$$

$$\times|a(\xi_1,\xi_2)|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

$$\leqslant C\frac{|R|^\varepsilon}{|y_1|^{1+\varepsilon}|y_2|^{1+\varepsilon}}\int_{R^2}|a(\xi_1,\xi_2)|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

$$\leqslant C\frac{|R|^{\varepsilon+1/2}}{|y_1|^{1+\varepsilon}|y_2|^{1+\varepsilon}}\|a\|_2,$$

故

$$|P_{22}|\leqslant\frac{C|R|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

对 P_{33}，当 $t_1<|x_1|, t_2<|x_2|$ 时，用上面关于$T(a)$的估计，有

$$|P_{33}|\leqslant\int_{R_{33}}\left|T(a)(y_1,y_2)\frac{1}{t_1t_2}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\varphi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\right|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$\leqslant C\int_{R_{33}}\frac{|R|^{\varepsilon+1/2}}{|y_1|^{1+\varepsilon}|y_2|^{1+\varepsilon}}\|a\|_2\frac{1}{t_1t_2}$$

$$\times\left|\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\varphi\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)\right|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$\leqslant C\frac{|R|^{\varepsilon+1/2}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{1+\varepsilon}}\|a\|_2.$$

当 $t_1>|x_1|, t_2>|x_2|$时，类似于P_{22}，有

$$|P_{33}|\leqslant\frac{C}{|x_1|^2|x_2|^2}\int_{R_{33}}|T(a)(y_1,y_2)||y_1y_2|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$\leqslant \frac{C|R|^{3/2-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

当 $t_1<|x_1|,t_2>|x_2|$ 时，有

$$|P_{33}|\leqslant \frac{C}{|x_2|^2}\int_{R_{33}}|T(a)(y_1,y_2)|\left|\frac{1}{t_1}\varphi\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\right||y_2|\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$$

$$\leqslant \frac{C|I|^{1/2+\varepsilon}|J|^{3/2-\alpha}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

类似地，当 $t_1>|x_1|,t_2<|x_2|$ 时，有

$$|P_{33}|\leqslant \frac{C|I|^{3/2-\alpha}|J|^{1/2+\varepsilon}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{1+\varepsilon}}\|a\|_2.$$

因此

$$|P_{33}|\leqslant \frac{C|R|^{1/2+\varepsilon}\|a\|_2}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{1+\varepsilon}}+\frac{C|R|^{3/2-\alpha}\|a\|_2}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}$$

$$+\frac{C|I|^{1/2+\varepsilon}|J|^{3/2-\alpha}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2+\frac{C|I|^{3/2-\alpha}|J|^{1/2+\varepsilon}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{1+\varepsilon}}\|a\|_2.$$

关于 P_{44}，有

$$|P_{44}|\leqslant \frac{C}{|x_1|^2|x_2|^2}\int_{R_{44}}|T(a)(y_1,y_2)||y_1y_2|\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$$

$$\leqslant \frac{C|R|^{3/2-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

对 P_{12}，则

$$|P_{12}|\leqslant \frac{C}{|x_1|^2|x_2|^2}\int_{R_{12}}|T(a)(y_1,y_2)||y_1y_2|\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$$

$$\leqslant \frac{C|I|^{3/2}|J|^{3/2-\alpha}}{|x_1|^2|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

类似地

$$|P_{21}|\leqslant\frac{C|I|^{3/2-\alpha}|J|^{3/2}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^2}\|a\|_2.$$

对P_{13}，当$t_2<|x_2|$时，

$$|P_{13}|\leqslant\frac{C|I|^{3/2}|J|^{1/2+\varepsilon}}{|x_1|^2|x_2|^{1+\varepsilon}}\|a\|_2;$$

当$t_2>|x_2|$时，

$$|P_{13}|\leqslant\frac{C|I|^{3/2}|J|^{3/2-\alpha}}{|x_1|^2|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

因此

$$|P_{13}|\leqslant C\|a\|_2\left(\frac{|I|^{\frac{3}{2}}|J|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|x_1|^2|x_2|^{1+\varepsilon}}+\frac{|I|^{3/2}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^2|x_2|^{2-\alpha}}\right).$$

类似地

$$|P_{31}|\leqslant C\|a\|_2\left(\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|J|^{\frac{3}{2}}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^2}+\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^2}\right).$$

对P_{14}，有

$$|P_{14}|\leqslant C\frac{|I|^{\frac{3}{2}}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^2|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

类似地

$$|P_{41}|\leqslant C\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^2}\|a\|_2.$$

对P_{23}，有

$$|P_{23}|\leqslant C\|a\|_2\left(\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{1+\varepsilon}}+\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\right).$$

类似地

$$|P_{32}|\leqslant C\|a\|_2\left(\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{2-\alpha}}+\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\right).$$

对P_{24}，有

$$|P_{24}|\leqslant C\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

类似地

$$|P_{42}|\leqslant C\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\|a\|_2.$$

对P_{34}，有

$$|P_{34}|\leqslant C\|a\|_2\left(\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{2-\alpha}}+\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\right),$$

类似地

$$|P_{43}|\leqslant C\|a\|_2\left(\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{1+\varepsilon}}+\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\right).$$

这些估计加起来，便知当$x_1\bar{\in}\gamma I$，$x_2\bar{\in}2J$时，有

$$\begin{aligned}|(T(a))^*(x_1,x_2)|\leqslant C\|a\|_2\Bigg\{&\frac{|I|^{\frac{3}{2}}|J|^{\frac{3}{2}}}{|x_1|^2|x_2|^2}+\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{2-\alpha}}\\&+\frac{|I|^{\frac{3}{2}-\alpha}|J|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|x_1|^{2-\alpha}|x_2|^{1+\varepsilon}}+\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|J|^{\frac{3}{2}-\alpha}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{2-\alpha}}\\&+\frac{|I|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|J|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|x_1|^{1+\varepsilon}|x_2|^{1+\varepsilon}}\Bigg\},\end{aligned}$$

其中$0<\alpha<1$，$(1+\varepsilon)p>1$，$(2-\alpha)p>1$且$\varepsilon+\alpha>1$.

把这个估计代回Ⅱ中，得到

$$\begin{aligned}\text{Ⅱ}&\leqslant C\{\gamma^{1-2p}+\gamma^{1-(2-\alpha)p}+\gamma^{1-(1+\varepsilon)p}\}|R|^{1-p/2}\|a\|_2^p\\&\leqslant C\gamma^{-\delta},\end{aligned}$$

其中$\delta=\min\{2p-1,(2-\alpha)p-1,(1+\varepsilon)p-1\}$. 定理3.3得证.

取

$$K(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{x_1-y_1}\frac{1}{x_2-y_2},$$

对应的算子就是二重Hilbert变换。记为$H_{x_1x_2}$. 它显然满足定理

3.3的条件．因此$H_{x_1x_2}$是$H^p(\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2)$到自身的有界线性算子，只要$0<p\leqslant1$且$p$充分接近于1．

§11.4 乘积空间上的BMO与Carleson测度

在第七章，我们讨论了$\mathbf{R}^n$上的BMO函数．正如我们已经看到的，由H^1空间的原子分解，我们得到$(H^1)^*=$BMO的一个直接的简单证明．但是，由于乘积空间上H^1的原子分解远比R^n上H^1的原子分解要复杂得多，可以想象乘积空间上的BMO函数也要比$\mathbf{R}^n$上的BMO函数复杂得多．实际上，关于这一点，我们还可以从另一角度来说明，也就是从BMO函数与Carleson测度之间的关系进行观察．下面我们首先讨论乘积空间上的Carleson测度．

定义4.1 设μ是定义在$\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2$上的一个非负测度，我们称$\mu$是Carleson测度，如果

$$\iint_{(\mathbf{R}_+^2)^2} P[f]^p\mathrm{d}\mu\leqslant C_p\int_{\mathbf{R}^2}|f(x)|^p\mathrm{d}x,\quad 1<p<\infty \tag{4.1}$$

对任意$f\in L^p(\mathbf{R}^2)$成立，其中C_p与f无关，$P[f]$是f在$\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2$上的Poisson积分，$1<p<\infty$．

由$\mathbf{R}^n$上的Carleson测度的定义与Carleson不等式，自然会猜测，(4.1)等价于

$$\mu(S(R))\leqslant C|R|, \tag{4.2}$$

其中R是$\mathbf{R}^2$的任意矩形$R=I\times J$，I,J是$\mathbf{R}$的区间，$S(R)=S(I)\times S(J)$，$S(I),S(J)$分别是I,J上的“帐篷”．

但是，早在1974年，Carleson就构造了一个反例μ，它满足(4.2)，但(4.1)却不成立．实际上，如果(4.2)和(4.1)等价的话，那么就可以得H^1的如下分解：若$f\in H^1$，则

$$f=\sum\lambda_k a_k,\quad \sum|\lambda_k|\leqslant C\|f\|_{H^1},$$

a_k满足：

(i) $\operatorname{supp} a_k \subset R_k = I_k \times J_k$，它是$\boldsymbol{R}^2$中的矩形；

(ii) $\displaystyle\int_{I_k} a_k(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{J_k} a_k(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 = 0$；

(iii) $\|a_k\|_2 \leqslant |R_k|^{1/2}$。

在§11.2已经看到，这实际上是不可能的。那么，什么条件才能刻画Carleson测度？其实只要把(4.2)中的矩形换成任意开集就行了。为此，引入下面的定义。

定义4.2 设$\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$是开集。记$R(y,t)$为以$y=(y_1,y_2)$为中心，边长分别是$2t_1, 2t_2$的矩形。定义$\Omega$上的Carleson区域$S(\Omega)$为

$$S(\Omega) = \{(y,t) \in \boldsymbol{R}_+^2 \times \boldsymbol{R}_+^2:\ R(y,t) \subseteq \Omega\}.$$

定理4.1 μ是$\boldsymbol{R}_+^2 \times \boldsymbol{R}_+^2$上的Carleson测度的充分必要条件是

$$\mu(S(\Omega)) \leqslant C|\Omega|$$

对一切开集$\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$成立。

证明 必要性是显然的，因为只要取$f=\chi_\Omega$，并注意到当$(x,t)\in S(\Omega)$时，有$P_t(\chi_\Omega) = P_{t_1 t_2} * \chi_\Omega(x) \geqslant C > 0$，从而

$$\mu(S(\Omega)) \leqslant \frac{1}{C}\int_{S(\Omega)} P_t(\chi_\Omega)(x)^p\,\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \frac{1}{C}\iint_{(R_+^2)^2} |P_t(\chi_\Omega)|^p\,\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant C_p \iint_{R^2} \chi_\Omega^p(x)\,\mathrm{d}x = C_p|\Omega|.$$

充分性的证明。令

$$P^*(f)(x) = \sup_{\substack{|y_1-x_1|<t_1\\ |y_2-x_2|<t_2}} |P_t(f)(y)|.$$

记$E_\lambda = \{x\in \boldsymbol{R}^2:\ P^*(f)(x) > \lambda\}$。容易看出$E_\lambda$是开集。记

$$\Omega_\lambda = \{(x,t)\in \boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2:\ |P_t(f)(x)| > \lambda\}.$$

由$\Omega_\lambda \subseteq S(E_\lambda)$，知

$$\iint_{(R_+^2)^2} |P_t(f)(x)|^p d\mu = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\Omega_\lambda)d\lambda$$

$$\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(S(E_\lambda))d\lambda$$

$$\leqslant C_p p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|E_\lambda|d\lambda$$

$$\leqslant C_p\|P^*(f)\|_p^p \leqslant C_p\|M_s(f)\|_p^p \leqslant C_p\|f\|_p^p,$$

这里M_s是强极大函数

$$M_s(f)(x) = \sup_{t_1,t_2>0} \frac{1}{|R(x,t)|}\int_{R(x,t)} |f(y)|dy.$$

显然有$P^*(f)(x)\leqslant CM_s(f)(x)$以及$\|M_s(f)\|_p^p\leqslant C_p\|f\|_p^p$，只要$1<p<\infty$。

定义4.3

$$\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2) = (H^1(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2))^*.$$

由于$H^1(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2)$是由$\boldsymbol{R}^2$的广义函数构成的，因此$\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2)$是$\boldsymbol{R}^2$上定义的函数.

定理4.2 在$\boldsymbol{R}^2$中，下列命题等价：

(i) $\varphi\in\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2)$；

(ii) 存在$g_j\in L^\infty(\boldsymbol{R}^2)$，$j=1,2,3,4$，使得

$$\varphi = g_1 + H_{x_1}(g_2) + H_{x_2}(g_3) + H_{x_1x_2}(g_4),$$

其中H_{x_1}, H_{x_2}分别是对变量x_1与x_2作用的Hilbert变换，$H_{x_1x_2} = H_{x_1}H_{x_2}$；

(iii) $|\nabla_1\nabla_2 u|^2 t_1t_2\,dydt$是$\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2$的Carleson 测度，其中$u=P(\varphi)$是$\varphi$的Poisson积分；

(iv) $|\psi_t*\psi(y)|^2\dfrac{dy\,dt}{t}$是$\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2$的Carleson 测度，其中

$$\psi(x_1,x_2)=\psi(x_1)\psi(x_2),\ \psi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}),\ \int_R\psi(x)dx=0.$$

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii). 可以完全仿照§3.2中定理2.4的证明，得到：$f\in H^1(\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2)$当且仅当$f\in L^1(\mathbf{R}^2)$且$H_{x_1}(f)$，$H_{x_2}(f)$与$H_{x_1x_2}(f)\in L^1(\mathbf{R}^2)$。进一步还有

$$\|f\|_{H^1(\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2)}\sim\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}+\|H_{x_1}(f)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}+\|H_{x_2}(f)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}$$

$$+\|H_{x_1x_2}(f)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}。$$

再完全仿照§7.1定理1.5中必要性的证明，便可证得所要求的结论。

(ii)$\Longrightarrow$(iii). 注意，在单变量情况下，应用Cauchy-Riemann方程、解析函数与Hilbert变换的关系，不难证明$|\nabla P(f)|^2=|\nabla P(Hf)|^2$. 完全类似地，在乘积空间的情形，有$|\nabla_1\nabla_2P(f)|^2=|\nabla_1\nabla_2P(H_{x_1}f)|^2=|\nabla_1\nabla_2P(H_{x_2}f)|^2$. 因此，只需对$\varphi\in L^\infty(\mathbf{R}^2)$，证明$|\nabla_1\nabla_2P(\varphi)|^2t\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t$是$\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2$的Carleson测度就够了。

在§11.1引理1.2中，取$g=\chi_\Omega$，其中Ω是$\mathbf{R}^2$的任意开集。注意到引理1.2中定义算子$\tilde{P}_t$的函数的支集是$[-1,1]$，当$(x,t)\in S(\Omega)$时，有$\tilde{P}_tg(x)=1$。故

$$\iint\limits_{S(\Omega)}|\nabla_1\nabla_2u|^2t_1t_2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant C\|f\|_\infty^2\Big\{\iint\limits_{(\mathbf{R}_+^2)^2}|\tilde{Q}_tg|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$$

$$+\int_{x_1\in\mathbf{R}}\Big(\int_{(x_2,t_2)\in\mathbf{R}_+^2}|\tilde{Q}_{t_2}g|^2\mathrm{d}x_2\frac{\mathrm{d}t_2}{t_2}\Big)\mathrm{d}x_1$$

$$+\int_{x_2\in\mathbf{R}}\Big(\int_{(x_1,t_1)\in\mathbf{R}_+^2}|\tilde{Q}_{t_1}g|^2\mathrm{d}x_1\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1}\Big)\mathrm{d}x_2$$

$$+\int_{\mathbf{R}^2}|g|^2\mathrm{d}x\Big\}$$

$$\leqslant C\|f\|_\infty^2\|g\|_2^2\leqslant C\|f\|_\infty^2|\Omega|.$$

(iv)$\Longrightarrow$(i). 由§11.2的原子分解定理知，若$f\in H^1(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2)$,则$f=\sum\lambda_k a_k$,其中$a_k$是(1,2,0,0)原子，$\sum|\lambda_k|\leqslant C\|f\|_{H^1}$。现设$\varphi$满足(iv)，我们只需证明

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}^2}a_k(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right|\leqslant C, \tag{4.3}$$

其中C与a_k无关。

由§11.2中定理2.1的证明过程知，

$$a_k(x)=\frac{1}{2^k|\widetilde{\Omega}_k|}\sum_{R\in\mathscr{R}_k}e_R(x),$$

$$e_R(x)=\iint\limits_{\mathscr{A}(R)}f(y,t)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t},$$

其中

$$\widetilde{\Omega}_k=\left\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2:\quad M_s(\chi_{\Omega_k})(x_1,x_2)>\frac{1}{2}\right\},$$

$$\mathscr{R}_k=\left\{R:\ \boldsymbol{R}^2\text{的二进矩形},\ |R\cap\Omega_k|>\frac{|R|}{2},\right.$$

$$\left.|R\cap\Omega_{k+1}|\leqslant\frac{|R|}{2}\right\},$$

$$\Omega_k=\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2:\ S(f)(x_1,x_2)>2^k\}.$$

因此

$$\left|\sum_{R\in\mathscr{R}_k}\int_{R^2}e_R(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{R\in\mathscr{R}_k}\int_{R^2}\varphi(x)\int_{\mathscr{A}(R)}f(y,t)\psi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right|$$

$$=\left|\iint\limits_{\substack{\cup\mathscr{A}(R)\\R\in\mathscr{R}_k}}f(y,t)\varphi(y,t)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right|.$$

$$\leqslant\left(\iint\limits_{\substack{\cup\mathscr{A}(R)\\R\in\mathscr{R}_k}}|f(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{\substack{\cup\mathscr{A}(R)\\R\in\mathscr{R}_k}}|\varphi(y,t)|^2\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/2},$$

其中$\varphi(y,t)=\psi_t*\varphi(y)$，

$$\mathscr{A}(R)=\{(y,t)\in \boldsymbol{R}^2_+\times \boldsymbol{R}^2_+ :\ y\in R,\ |I|<t_1<2|I|,\ |J|<t_2<2|J|\}.$$

在定理2.1的证明中，已知

$$\iint_{\substack{\cup\mathscr{A}(R)\\ R\in\mathscr{A}_k}} |f(y,t)|^2\frac{dy\,dt}{t}\leqslant C2^{2k}|\tilde{\Omega}_k|.$$

注意到当$R\in\mathscr{R}_k$时，$\mathscr{A}(R)\subset S(\tilde{\Omega}_k)$，由条件(iv)知

$$\iint_{\substack{\mathscr{A}(R)\\ R\in\mathscr{R}_k}} |\varphi(y,t)|^2\frac{dy\,dt}{t}\leqslant\iint_{S(\tilde{\Omega}_k)} |\varphi(y,t)|^2\frac{dy\,dt}{t}\leqslant C|\tilde{\Omega}_k|.$$

这就推出了(4.3)。

(iii)$\Longrightarrow$(iv)可以与单参数类似地证明。

§11.5 注释与进一步的结果

注释

乘积空间上H^p空间的建立，有着本质上的困难。M.P.Malliavin与P.Malliavin通过复杂的代数技巧最先取得进展(参见[MM])。后来，Gundy与Stein推广与简化了他们的方法，在乘积空间上建立了H^p空间(参见[GS])。定理1.1属于Gundy-Stein，但其中定理第二部分我们采用了K.Merryfield的证明(参见[Me])。

Carleson1974年举出的反例[Car2]，说明乘积H^p空间的原子支集与Carleson测度不能简单地用方体定义。张圣蓉与R.Fefferman最早给出H^p空间的原子分解，并给出了几种不同的原子的定义(参见[CF1],[CF3])。但由于原子的支集是一般的开区域，因此在用于研究算子在H^p空间的作用时带来不便。Journé于1986年发现了覆盖引理2.1(参见[Jou2])。R.Fefferman通过这个覆盖引

理把算子有界性问题转化为支于长方体的原子。定义2.1与定义2.2是R.Fefferman首先引入的.定理2.1必要性的证明属于他(参见[Fe4]). 充分性的证明以及最少消失矩数目的确定属于韩永生(参见[H12])。定理2.2是韩永生最先证明的。

定理3.1是R.Fefferman首先发现并证明的(参见[Fe3],[Fe1])。韩永生把它推广为定理3.2并应用于证明定理3.3(参见[H13])。

定理4.1与4.2属于张圣蓉与R.Fefferman(见[Ch],[CF1—3],[Fe1]).

进一步的结果

1. 下面给出$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$的三种不同的原子定义，对它们都可以分别得到$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$的原子分解。

(1) 称函数$a(x_1,x_2)$为原子，如果

(i) $\operatorname{supp} a\subset\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$，$\Omega$是测度有限的开集；

(ii) $a=\sum\limits_{R\subset\Omega}C_R b_R$，$R$是$\Omega$中所有二进长方形，$C_R$满足

$$\sum|C_R|^2|R|\leqslant|\Omega|^{-1/2},$$

b_R称为基本粒子，满足

$$\operatorname{supp} b_R\subset R,\qquad R=I\times J.$$

$$\int_I b_R(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1=0,\qquad \text{对任意}x_2\in\boldsymbol{R}^1,$$

$$\int_J b_R(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2=0,\qquad \text{对任意}x_1\in\boldsymbol{R}^1,$$

$$\left\|\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x_1^\alpha\partial x_2^\beta}b(x_1,x_2)\right\|_\infty\leqslant C\frac{1}{|I|^\alpha|J|^\beta},\quad \text{只要}\alpha+\beta\leqslant2.$$

(2) 称函数$a(x_1,x_2)$为原子，如果

(i) $\operatorname{supp} a\subset\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$，$\Omega$为测度有限的开集；

(ii) $\|a\|_2 \leqslant |\Omega|^{-1/2}$；

(iii)

$$|a * \varphi_{t_1 t_2}(x_1,x_2)| \leqslant \frac{1}{|\Omega|}\left(\frac{|R_{2t_1,2t_2}(x_1,x_2) \cap \tilde{\Omega}|}{|R_{t_1,t_2}|}\right)^{10},$$

只要$(x_1,x_2) \notin \tilde{\Omega}$，其中$\varphi \in C_0^\infty(R^2)$满足

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{(x_1,x_2): |x_1| \leqslant 1, |x_2| \leqslant 1\},$$

$$\left\|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta}\right\|_\infty \leqslant 10^{10}, \text{ 当} \alpha+\beta \leqslant 20,$$

$$\tilde{\Omega} = \left\{(x_1,x_2): M_s(\chi_\Omega)(x_1,x_2) > \frac{1}{2}\right\},$$

M_s为强极大函数。

(3) 称函数$a(x_1,x_2)$为原子，如果

(i) $\operatorname{supp} a \subset \Omega \subset \boldsymbol{R}^2$，$\Omega$为测度有限的开集；

(ii) 对任意$(x_1,x_2) \in \boldsymbol{R}^2$，

$$S(a)(x_1,x_2) \leqslant M_s^{10}(\chi_{\tilde{\Omega}})(x_1,x_2)A(x_1,x_2),$$

其中S表示S函数，$\|A\|_2 \leqslant |\Omega|^{-1/2}$。

对于不同的问题，可以应用不同的原子定义。利用这些原子的定义，可以直接得到乘积空间的H^1的对偶BMO的不同刻画，也可以得到算子在H^1与L^2之间的内插，也可以证明H^1空间中极大函数与S函数的范数等价性等等。参见[CF1],[CF3]。

2. J.-L.Journé把$T(1)$定理推广到乘积空间的情形。

记$\Omega = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \backslash \Delta$，$\Delta = \{(x,y): x=y\}$。$B$是Banach 空间。设$K: \Omega \to B$，在$\Omega$连续。称$K \in \mathrm{CZK}_B(\gamma)$，$0<\gamma \leqslant 1$，如果

$$|K(x,y)|_B \leqslant \frac{C}{|x-y|},$$

当$|x-y| > 2|x-x'|$时，

$$|K(x,y) - K(x',y)|_B \leqslant \frac{C|x-x'|^\gamma}{|x-y|^{1+\gamma}},$$

当$|x-y|>2|y-y'|$时，

$$|K(x,y)-K(x,y')|_B\leqslant\frac{C|y-y'|^\gamma}{|x-y|^{1+\gamma}}.$$

记满足上述不等式的最小常数C为$|K|_\gamma$。

设T：$\mathscr{D}(\boldsymbol{R})\to\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$线性连续。称$T\in \mathrm{CZO}_B(\gamma)$，如果$T$的分布核$K\in \mathrm{CZO}_B(\gamma)$，且$T$可开拓为$L^2$的有界算子。这时定义$\|T\|_{\mathrm{CZO}}=\|T\|_{(2,2)}+|K|_\gamma$。

考虑乘积空间的情形。设T：$\mathscr{D}(\boldsymbol{R})\otimes\mathscr{D}(\boldsymbol{R})\to(\mathscr{D}(\boldsymbol{R})\otimes\mathscr{D}(\boldsymbol{R}))'$线性连续，称$T\in\mathrm{CZK}(\gamma)(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，如果存在一对$K_1,K_2\in \mathrm{CZK}_{\mathrm{CZO}(\gamma)}(\gamma)$，使得对任意$f,g,h,k\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$，有

$$\langle g\otimes k,Tf\otimes h\rangle=\iint\limits_{\boldsymbol{R}^2}g(x)\langle k,K_1(x,y)h\rangle f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\langle k\otimes g,Th\otimes f\rangle=\iint\limits_{\boldsymbol{R}^2}g(x)\langle k,K_2(x,y)h\rangle f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

T的对偶记为T^*。定义$\tilde{T}$为

$$\langle g\otimes k,\tilde{T}f\otimes h\rangle=\langle f\otimes k,Tg\otimes h\rangle.$$

称$T\in\mathrm{CZO}(\gamma)(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，如果$T\in\mathrm{CZK}(\gamma)(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，且$T$可开拓为$L^2$的有界算子。

设$T\in\mathrm{CZK}(\gamma)(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，定义算子$\langle g,T^1f\rangle$：$\mathscr{D}(\boldsymbol{R})\to\mathscr{D}(\boldsymbol{R})'$如下：

$$\langle h,\langle g,T^1f\rangle k\rangle=\langle g\otimes h,Tf\otimes h\rangle。$$

容易看出，$\langle g,T^1f\rangle$具有核$\langle g,K_2(x,y)f\rangle$。类似地定义$\langle g,T^2f\rangle$。称$T\in\mathrm{CZK}(\gamma)(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$为弱有界，即$T\in\mathrm{WBP}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，如果对任意$\varphi,\psi\in\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$为$\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$的有界集，有

$$\|\langle\varphi_t^x,T^j\psi_t^x\rangle\|_{\mathrm{CZO}(\gamma)}\leqslant C_{\mathscr{B}}t^{-1},\qquad j=1,2,$$

其中$\varphi_t^x(y)=\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{y-x}{t}\right)$.

乘积空间的$T(1)$定理可叙述为：设$T\in\mathrm{CZK}(\gamma)(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，

则$T\in \mathrm{CZO}(\gamma)(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，当且仅当$T(1)$，$T^*(1)$，$\tilde{T}(1)$，$\tilde{T}^*(1)\in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，且$T\in \mathrm{WBP}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$。详见[Jou3]

3．尽管许多关于$H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$的结果可以推广到$H^p(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$，但并不是所有的结果都能推广的。记$\boldsymbol{R}^3=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$。称函数$a(x_1,x_2,x_3)$为$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$的长方体原子，如果

$$\operatorname{supp} a\subset I_1\times I_2\times I_3,\quad I_j \text{是}\boldsymbol{R}\text{的区间},$$

$$\int_{\boldsymbol{R}} a(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_j=0,\qquad j=1,2,3.$$

$$\|a\|_{L^2}\leqslant |R|^{-1/2},\qquad R=I_1\times I_2\times I_3.$$

设T是$L^2(\boldsymbol{R}^3)$的有界算子，且对于每个$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$的长方体原子$a$，有

$$\int_{(\tilde{R}_\gamma)^c}|Ta|\mathrm{d}x\leqslant C\gamma^{-\delta},\qquad \delta>0,\ \gamma\geqslant 2.$$

问题是由此能否断言T是$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$到$L^1(\boldsymbol{R}^3)$的有界线性算子。答案是否定的。最近，J.-L.Journé证明了

(1) 存在算子T，满足上述条件，但T不是$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$到$L^1(\boldsymbol{R}^3)$的有界算子。

(2) 如果T是卷积算子，且$\delta>\frac{1}{8}$，则T是$H^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$到$L^1(\boldsymbol{R}^3)$的有界算子。

这结果表明，两参数的情形与三参数的情形是存在着本质差别的。

参考文献

[B1] S.Bochner, Vorlesungen uber Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[B2] ——, Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley, 1955.

[Ba] H. Bateman, Higher transcendental functions, vol. 2, McGraw-Hill., 1953.

[BC] S. Bochner and K. Chandrasekharan, Fourier Transforms, Princeton, 1949.

[BDS] C.Bennett, R.A.DeVore and R. Sharpley, Weak-L^∞ and BMO, *Ann.of Math.*, 113(1981), 601—611.

[BGS] D.L. Burkholder, R.F.Gundy and M.L.Silverstein, The maximal function characterization of the class H^p, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157 (1971), 137—153.

[BL] J.Bergh, and J. Löfström, interpolation spaces, New York, Springer-Verleg, 1976.

[BS] A.I. Baernstein and E.T.Sawyer, Embedding and multiplier theorems for $H^p(R^n)$, Memoirs of AMS. Vol.53, 318 (1985), 1—82.

[BS1] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of operators, Academic Press, 1988.

[BS2] ——, Weak type inequalities for H^p and BMO, *Proc. Sym. in Pure Math.*, 35 (I) (1979), 201—229.

[C1] A.P.Calderón, On the behavior of harmonic functions near the boundary, *Trans.Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 47—54.

[C2] ——, Commutators of singular integral operators, *Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A.*, 53 (1965), 1092—1099.

[C3] ——, Cauchy integrals on Lipschitz curves and rela-

ted operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74(1977), 1324—1327.

[C4] ——, Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, *Proc. Intern. Congress Math.*, Helsinki, 1978, 85—96.

[C5] ——, An atomic decomposition of distributions in parabolic H^p spaces, *Adv. in Math.*, 25 (1977), 216—225.

[C6] ——, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math*, 24 (1964), 113—190.

[Cam1] S. Campanato, Proprietá di holderianita di alcune classi di funzioni, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*(3), 17 (1963), 175—188.

[Cam2] S. Campanato, Proprietá di una famiglia di spazi funzionali, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 18 (1964), 137—160.

[Car1] L. Carleson, Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. of Math.*, 76 (1962), 547—559.

[Car2] ——, A counterexample for measure bounded for H^p for the bi-disc, Mittag Leffler Report NO.7, 1974.

[Car3] ——, Two remarks on H^1 and B.M.O, *Adv. in Math.*, 22 (1976), 269—277.

[CCRSW1] R. Coifman, M. Cwikel, R. Rochberg, Y. Sagher and G. Weiss, The complex method for interpolation of operators acting on families of Banach spaces, Lecture Notes in Math., 779, Springer-Verlag, (1980), 123—153.

[CCRSW2] ——, A theory of complex interpolation of Banach spaces, *Adv. in Math.*, 33 (1982), 203—229.

[CDe] 程民德，邓东皋，多线性算子理论与Calderón猜测的解决，第三届函数逼近论会议论文集，1982，5—18.

[CDeM] R. Coifman, D.G. Deng and Y. Meyer, Domaine de la racine carrée de certains opérateurs differentiels

accrétifs, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 33 (1983), 123—134.

[CDM] R. Coifman, G. David and Y. Meyer, La solution des conjectures de Calderón, *Adv. in Math.*, 48(1983), 144—148.

[CDMS] R. Coifman, G. David, Y. Meyer and S. Semmes, ω-Calderón Zygmund operators, Proc. of Conf. El Escorial, 1987, "Harmonic Analysis and PDE", J. Garcia-Cuerva et al.eds., Lec. Notes in Math., 1384, 132—145, Springer-Verlag.

[CF1] S. Y. Chang and R. Fefferman, A continuous version of the duality of H^1 with BMO on the bidisk, *Ann. of Math.* 112 (1980), 179—201.

[CF2] S.Y. Chang and R. Fefferman, The Calderón-Zygmund decompositions on product domains, *Amer. J. Math.*, 104 (1982), 445—468.

[CF3] ——, Some recent developments in Fourier analysis and H^p theory on product domains, Bull, *Amer. Math. Soc.*, 12 (1985), 1—43.

[Ch] S.Y. Chang, Carleson measures on the bi-disc, *Ann. of Math.*, 109 (1979), 613—620.

[CJ] M. Christ and J.L. Journé, Estimates for multilinear singular integral operators with polynomial growth, *Acta Math.*, 159 (1987), 51—80.

[CJR] R. Coifman, P.W. Jones and J. L. Rubio de Francia, Constructive decomposition of B.M.O.functions and fractorization of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soci.*, 87 (1983), 675—676.

[CM1] R. Coifman and Y. Meyer, On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 212 (1975), 315—331.

[CM2] ——, Au delà des opérateurs pseudo-differentiels, Asterisque, 57, 1978.

[CM3] ——, Fourier analysis of multilinear convolutions,

Calderón's theorem and analysis on Lipschitz curves, Lecture Notes in Math., 779(1979),104--122, Springer-Verlag.

[CM4] ——, Non-linear harmonic analysis, operator theory and P. D. E.,Beijing Lectures in Harmonic Analysis, edited by E.M. Stein, 1986, 3—45, Princeton Univ. Press.

[CM5] ——, *A simple proof of a theorem* by G. David and J.-L. Journé on singular integral operator, "Probability theory and harmonic analysis", edited by J.-A. Chao and W.A. Woyczynski, Marcel Dekker, 1983, 61—65.

[CM6] ——, *Ondelettes et operateurs*, II, Hermann, 1991.

[CMM1] R. Coifman, A.McIntosh, and Y. Meyer, L'integrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes Lipschitziennes, *Ann. of Math.*,116(1982), 361—388.

[CMM2] ——, The Hilbert transform on Lipschitz curves, Proc. Miniconf. on PDE.,Centre for Math. Analysis, Australian Nat. Univ., Canberra, Australia, 1982, 26—69.

[CMS1] R. Coifman, Y. Meyer and E. M. Stein, Un nouvel espace fonctionnel adapte a l'étude des operateurs définis par des integrales singulières, Pro. Conf. on Harmonic Analysis,Cortona,Lecture Notes in Math. 992 (1983), 1—15, Springer-Verlag.

[CMS2] ——, Some new function spaces and their applications to harmonic analysis,J.Funct.Analysis, 62(1985), 304—335.

[Co1] R. Coifman, A real variable characterization of H^p, *Studia Math.*, 51 (1974), 269—274.

[Co2] ——, Characterizations of Fourier transforms of Hardy spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. A.*, 71(1974), 4133—4134.

[Co3] ——, Distribution functions inequalities for singular integrals, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 69 (1972), 2838—2839.

[CoF] R. Coifman, and C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.* 51, (1974), 241—250.

[CR1] R. Coifman and R. Rochberg, Another characterization of BMO, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 79(1980), 249—254.

[CR2] ——, Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p, *Asterisque* 77(1980), 11—66.

[CRW] R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Fractorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.*, 103 (1976), 611—635.

[CT1] A.P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, *Adv. in Math.* 16 (1975), 1—63.

CT2] ——, Parabolic maximal functions associated with a distribution Ⅱ, *Adv. in Math.*, 24 (1977), 101—171.

[CW1] R. Coifman and G. Weiss, Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes, Lecture Notes in Math., 242 (1971), Springer-Verlag.

[CW2] ——, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83 (1977), 569—645.

[CW3] ——, On subharmonicity inequalities involving solution of generalized Cauchy-Riemann equations, *Studia Math.*, 36(1970), 77—83.

[CZ1] A. P. Calderón and A. Zygmund, On the theorem of Hausdorff-Young and its extensions, Ann. Math. Study, NO 25, 166—188, Princeton Univ. Press, 1950.

[CZ2] ——, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, 88 (1952), 85—139.

[CZ3] ——, On singular integrals, *Amer. J. Math.* 18(1956),

289—309.

[CZ4] ——, On higher gradients of harmonic functions, *Studia Math.*, 24 (1964), 211—226.

[D1] G. David, Opérateurs intégraux singuliers sur certains courbes du plan complexe, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4° série, 17 (1984) , 157—189.

[D2] ——, Une minoration de la norme de l'opérateur de Cauchy sur les graphes Lipschitiziens, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302 (1987), 741—750.

[D3] ——, Opérateurs de Calderón-Zygmund. Proc. I. C. M. Berkeley, 1986.

[D4] ——, An alternate proof of Coifman-McIntosh-Meyer's theorem of the Cauchy integral, Research report, Centre for Math. Analysis, Australian Nat. Univ. No. 22, 1984.

[D5] ——, Wavelets and singular integrals on curves and surfaces, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1465.

[De1] 邓东皋，奇异积分算子的有界性，数学进展， Vol.17，1(1983)，623—633.

[De2] D. G. Deng, On a generalized Carleson inequality, *Studid Math.* 78(1984), 245—251.

[deG] M. de Guzman, Real variable methods in Fourier analysis, Math. Studies 46, North. Holland, 1981.

[DeH1] 邓东皋，韩永生，Besov空间与Triebel-Lizorkin空间的刻画与ε算子族，北京大学学报（自然科学），第26卷，3 (1990)，267—279.

[DeH2] D. G. Deng and Y. S. Han, On a generalized para-product defined by non-convolution, Proc. Tianjin, 1988, Lecture Notes in Math., 1494, Springer-Verlag, 46—53.

[DeP] 邓东皋，彭立中，小波分析，数学进展，Vol. 20，3(1991)，294—310.

[DeV] R. DeVore, The K functional for (H^1, BMO), Lec-

ture Notes in Math., 1070, Springer-Verlag (1983), 66—79.

[DJ] G. David and J.-L. Journé, A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Ann. of Math.*, 120 (1984), 371—397.

[DJS] G. David, J.-L. Journé and S. Semmes, Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accréti ves et interpolation, Revista Matematica Ibero Americana Vol.1, 4(1985), 1—56.

[DRS] P. L. Duren, B. W. Romberg and A. L. Shields, Linear functionals on H^p spaces with $0<p<1$, *J. Reine Angew. Math.*, 238 (1969), 32—60.

[Du] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, New York, 1970.

[F1] C. Fefferman, Characterization of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 587—588.

[F2] ——, Harmonic analysis and H^p spaces, Studies in Harmonic Analysis, edited by Ash, M., MAA Studies in Math. No. 13 (1976), 38—75.

[Fe1] R. Fefferman, Functions on bounded mean oscillation on the bi-disc, *Ann.of Math.* 10 (1979), 395—406.

[Fe2] ——, Multiparameter Fourier analysis, Beijing Lecture in Harmonic Analysis, edited by E. M. Stein, 1986, 47—130, Princeton Univ. Press.

[Fe3] ——, Harmonic analysis on product spaces, *Ann. of Math.* 123 (1987), 109—130.

[Fe4] ——, Calderón-Zygmund theory for product domains -H^p theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol.83, Feb., 1986.

[Fe5] ——, The atomic decomposition of H^1 on product spaces, *Adv. in Math.*, 55 (1985), 90—100.

[FHJW] M. Frazier, Y.S. Han, B. Jawerth and G. Weiss, The T(1) theorem for Triebel-Lizorkin spaces, Proc. of Conf. on Harmonic Analysis and PDE, El Escorial,

1987, J. Garcia-Cuerva et. al. eds., Lecture Notes in Math., 1384, Springer-Verlag, 168—181.

[FJ1] M. Frazier and B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 24 (1985), 777—799.

[FJ2] ——,The ϕ-transform and applications to distribution spaces.Lecture Notes in Math.,1302,Springer-Verlag, 223—246.

[FJ3] ——, A discrete transform and decomposition of distribution spaces, *J.Funct.Analysis*, 93(1990),34—170.

[FJK] E. Fabes, D. Jerison and C. Kenig, Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equation, *Proc. Nat. Acad. Sci.*U. S.A., 79 (1982), 5746—5750.

[FJN] E. B. Fabes, R. L. Johnson and U. Neri, Spaces of harmonic functions representable by Poisson integrals of functions in BMO and $L_{p,\lambda}$, *Indiana Univ. Math. J.*, 25 (1976), 159—170.

[FK] E. B. Fabes and C. Kenig, On the Hardy spaces of a C^1 domain, *Ark. Mat.*, 19 (1981), 1—22.

[FOS] G.B.Folland and E.M. Stein, Hardy spaces on homogeneous group, Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1982.

[FRS] C. Fefferman, N.M.Riviere and Y. Sagher, Interpolation between H^p spaces, The real method, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 191 (1974), 75—81.

[FS1] C. Fefferman and E. M. Stein, Some maximal inequalities, *Amer. J. Math.*, 93 (1971), 107—115.

[FS2] ——, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, 129 (1972) , 137—193.

[G] J. Garcia-Cuerva, Weighted Hardy spaces, *Proc. Symp. Pure Math.*, 35 (1) , 1979, 253—261.

[Ga] B. Garnett, Bounded analytic function, Academic Press, 1981.

[GaJ] B. Garnett and P.W. Jones, The distance in BMO to L^{∞}, *Ann. of Math.*, 108 (1978), 373—393.

[GaL] B.Garnett and R.H. Latter, The atomic decomposition for Hardy spaces in several variables, *Duke Math. J.*, 45 (1978), 815—845.

[GaS] G. Jr. Gasper, On the Littlewood-Paley and Lusin function in higher dimensions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 57 (1967), 25—28.

[Ge1] D. Geller, Fourier analysis on the Heisenberg group, I: the Schwartz spaces, *J. Functional Analysis*, 36 (1980), 205—254.

[Ge2] D. Geller, Some results in H^p theory for the Heisenberg group, *Duke Math. J.*, 47 (1980), 365—390.

[Go] D. Goldberg, A local version of real Hardy spaces, *Duke Math. J.*, 46 (1979), 27—42.

[GR] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics, North-Holland, 1985.

[GS] R.F. Gundy and E.M. Stein, H^p theory for the poly-disc, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 76 (1979), 1026—1029.

[H1] 韩永生，Calderon-Zygmund 分解的一种形式及其在算子内插中的应用，中国科学，A辑，1983，604—615。

[H2] ——，乘积空间上的一类Hardy 空间，北京大学学报（自然科学），1(1986)，[illegible]—52。

[H3] ——，一类Hardy型空间，数学季刊，2(1986)，42—64。

[H4] ——，关于S函数与Marcinkiewicz积分的一些性质，北京大学学报(自然科学) 5(1[illegible])，21—[illegible]。

[H5] ——，一类Hardy型空间$H_{0}^{p,q,s}(R^n)$，中国科学，8(1987)，800—812。

[H6] ——，反向 Carleson 不等式及空间 H_{φ} 的刻画，中国科学，3(1988)，247—253。

[H7] ——，近代调和分析方法及其应用，科学出版社，1988.

[H8] Y.S. Han, On a theorem concerning Carleson mea-

sure and its applications, ***Ann. Math. in China***, 4B(1) (1983), 15—20.

[H9] ——, Certain Hardy-type spaces that can be characterized by maximal functions and variation of the square functions, A dissertation, Washington Univ. in St. Louis, 1984.

[H10] ——, The interpolation of operators on Hardy type spaces, *Approximation Theory and its Applications*, 4 (1985), 83—92.

[H11] ——, Riesz potential operator on certain Hardy-type spaces, Approximation Theory and its Appricalions, 1 (1988), 19—36.

[H12] ——, A problem in $H^p(\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_+^2)$. Chinese Science Bullitin, 34 (1989), 617—622.

[H13] ——, The H^p boundedness of Calderón-Zygmund operators for product domains, Proc. Tianjin, 1988, Lecture Notes in Math., 1494, Springer-Verlag, 54—67.

[Ha] R. Hans, Interpolation by the real method between BMO, L^α $(0<\alpha<\infty)$ and H^α $(0<\alpha<\infty)$, ***Indiana Math. J.***, 26 (1977), 679—690.

[He] E. Hermandez, An interpolation theorem for analytic families of operators acting on certain H^p spaces, *Pacific J. of Math.*, 110 (1984), 113—118.

[HL] 韩永生，龙瑞麟，关于乘积空间与广义 Carleson 测度，中国科学，A辑，11(1985)，965—974.

[HMW] R.A. Hunt, B. Muckenhoupt and R.L. Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, ***Tans. Amer. Math. Soc.***, 176 (1973), 227—251.

[Hö1] L. Hörmander, Estimate for translation invariant operators in L^p spaces, *Acta Math.*, 104 (1960), 93—139.

[Hö2] ——, L^p estimate for (pluri-) subharmonic function,

Math. Scand, 20 (1967), 65—78.

[I1] S. Igari, An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz, *Proc. Japan Acad.*, 38 (1962), 731—734.

[I2] ——, An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz II, *Tohoku Math. J.*, 15 (1963), 343—358.

[J] S. Janson, Characterization of H^1 by singular integral transforms on martingales and $\mathbf{R}^n$. *Math. Scand.*, 41 (1977), 140—152.

[Ja] B. Jawerth, The K-functional for H^1 and BMO, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92 (1984), 67—71.

[JJ] S. Janson and P.W. Jones, Interpolation between H^p spaces, The complex method, J. Funct. Anal., 48 (1982), 58—80.

[JK] D.S. Jerison and C. Kenig, Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domain, *Adv. in Math.*, 46 (1982), 80—147.

[JN] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 14(1961), 415—426.

[Jon1] P.W. Jones, Carleson measures and the Fefferman-Stein decomposition of BMO (R), *Ann. of Math.*, 11 (1980), 197—208.

[Jon2] ——, Interpolation between Hardy spaces, Conf. on harmonic Anal. in Honor of A. Zygmund, vol II, (1983), 437—451.

[Jon3] ——, On interpolation between H^1 and H^∞, Lecture Notes in Math. 1070, Springer-Verlag (1983), 143—151.

[Jon4] ——, L^∞ estimate for the $\bar{\partial}$ problem in a half-plane, *Acta Math.*, 150 (1983), 137—152.

[Jou1] J.L. Journé, Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Ca-

lderón, Lecture Notes in Math. 994, Springer-Verlag.

[Jou2] ——, A covering lemma for product spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 96 (1986) 593—598.

[Jou3] ——, Calderón-Zygmund operators on product spaces, Revista Mat. Iberoamericana, 1 (1985), 55—91.

[K1] C. Kenig, Weighted H^p spaces on Lipschitz domains, *Amer. Jour. Math.*, 102 (1980), 129—163.

[K2] C. Kenig, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, *Proc. Symp. Pure Math.*, 35(1) (1979), 263—274.

[K3] ——, Elliptic boundary value problems on Lipschitz domains. Beijing Lectures in Harmonic Analysis, edited by E.M. Stein, 1986, 131—184, Princeton Univ. Press.

[Ko1] P. Koosis, Introduction to H^p spaces, London Math. Soc. Lecture Notes Series 40 (1980).

[Ko2] ——, Sommabilité de la fonction maximale et appartenance à H_1, C. R. Acad. Sci, Paris, Sér. A, 28 (1978).

[Ko3] ——, Sommabilité de la fonction maximale et appartenance à H_1, Cas de plusieurs variables, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér A, 288 (1979), 489—492.

[Kr] S. Krantz, Fractional integration on Hardy spaces, *Studia Math.*, 73 (1982), 87—94.

[Ku] D.S. Kurtz, Littlewoed-Paley operators on BMO, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99 (1987), 657—666.

[L] R.H. Latter, A decomposition of H^p $(\boldsymbol{R}^n)$ in terms of atoms, *Studia Math.*, 62 (1977), 92—101.

[L1] 龙瑞麟, Block(块)生成的空间, 中国科学, A 辑, 7(1983), 594—603.

[L2] ——, H^p 鞅论, 北京大学出版社, 1985.

[LM] P.G. Lemarie and Y. Meyer, Ondelettes et basis hilbertiennes, Revista Mathematica Ibero Americana Publisher A. Cordoba, Universided Antonoma de

Madrid, Madrid (34), Spain.

[LTW] S.Z.Lu, M.H.Taibleson and G.Weiss, On the almost everywhere convergence of Bochner-Riesz means of multiple Fourier series, Lecture Notes in Math., 908 (1981), 311—318, Springer-Verlag.

[LU] R.H. Latter and A.Uchiyama, The atomic decomposition for parabolic H^p spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 253 (1979), 391—398.

[Lu1] 陆善镇，关于函数的Block分解，中国科学，A 辑，12(1983)，1089—1098.

[Lu2] ——，临界阶 Riesz 平均在实 Hardy 空间上的逼近性质，中国科学，A辑，4(1987)，349—358.

[Lu3] ——，共轭Bochner-Riesz平均在H^p上的弱型估计，数学年刊，A辑，3(1986)，284—288.

[Lu4] S.Z. Lu, A note on the almost everywhere of Bochner-Riesz means of multiple conjugate Fourier series, Lecture Notes in Math., 908 (1981), 319—325, Springer-Verlag.

[LY] 龙瑞麟，杨乐，齐型空间上的 BMO 函数，中国科学，A 辑，4 (1984)，301—312.

[M1] Y. Meyer, Continuite sur les espaces de Hölder et de Sobolev des operateurs definis par des integrales singuliers. "Recent Progress in Fourier Analysis", *North-Holland Math. Studies*, 111 (1983), 145—172.

[M2] ——, Integrales singuleres, operateurs multilineaires, analyse complexe et equations aux diriveers partielles, *Proc. ICM*. 1983, 1001—1010, Warszawa.

[M3] ——, Real analysis and operator theory, *Proc. Symp. Pure Math. AMS, Providence, RI*, 43 (1985), 215—235.

[M4] ——, Wavelets and operators, Lecture Notes in Univ. of Illinois, 1986.

[M5] ——, Principe d incertitude bases hilbertiennes et algébres d'operateurs, Seminaire Bourbaki, Feb. 1986, no. 662.

[M6] ——, Ondelettes et operateurs, I, II, Hermann, 1990, 1991.

[Me] K. Merryfield, H^p spaces on poly-half spaces, Ph. D. Thesie, Univ. of Chicago, 1980.

[Mey] N.G. Meyers, Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 (1964), 717—721.

[Mi] A. Miyachi, On some Fourier multipliers for $H^p(R^n)$, *Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 27 (1980), 157—179.

[MM] M.P. Malliavin and P. Malliavin, Integrales de Lusin-Calderón pour les fonctions b[illegible]niques, Bull. Sci. Math. 2e serie, 101 (1977), 357—384.

[MS1] R. Macias and C. Segovia, A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, *Adv. in Math.*, 33 (1979), 271—309.

[MS2] ——, Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, *Adv. in Math.*, 33 (1979), 257—270.

[MTW] Y. Meyer, M. H. Taibleson and G. Weiss, Some function analytic properties of the spaces Bq generated by blocks. *Indiana Math. J.*, 34 (1985), 493—515.

[Mu] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 165 (1972), 207—226.

[Mur] T. Murai, A real variable method for the Cauchy transform and analytic capacity, Lecture Notes in Math., 1307, Springer-Verlag.

[P1] J. Peetre, New thought of Besov spaces, Duke Univ. Press, 1976.

[P2] ——, On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces, *J. Funct. Anal.* 4 (1969), 71—87.

[P3] ——, On spaces of Triebel-Lizorkin type, *Ark. Mat.*, 13 (1975), 123—130.

[Pe1] 彭立中, Hardy-Sobolev空间, 北京大学学报(自然科学), 2 (1983), 26—41.

[Pe2] ——，广义 Calderón-Zygmund 算子及其加权模不等式，数学进展，vol.14，2(1985)，97—115.

[Pe3] L.Zh. Peng, The compactness of paraproduct, Report, Univ. of Stockholm, No: 13, 1984.

[Q] 钱涛，极大函数的BMO有界性，数学学报，3(1986)，317—322.

[Ri] F. Riesz and M. Riesz, Uber die Randwerte einer Analytischen Funktion, *Quatrieme des Mathenaticiens Scandinaves*, Stockholm (1916), 27—44.

[Ro] R. Rochberg, Decomposition theorems for Bergman spaces and their applications,"Operators and Function theory",S, S.C. Power, Ed. Reidel Dordrecht, (1985), 225—278.

[RoS1] R. Rochberg and S. Semmes, A decompositions theorem in BMO and applications, *J. funct. Anal.*, 67 (1986), 228—263.

[RoS2] R. Rochberg and S. Semmes, Nearly weakly orthonormal sequences, singular values estimation and Calderon-Zygmund operators, *J.Func.Anal.*,86(1989), 237—306.

[RoW1] R. Rochberg and G. Weiss, Complex interpolation of subspaces of Banach spaces, *Supp.Rend.Circ.Math.* Palermo I (1981), 179—186.

[RoW2] ——, Derivative of analytic families of Banach spaces, *Ann. of Math.*, 118 (1983), 315—347.

[RoW3] ——, Analytic families of Banach spaces and some of their uses, "Recent progress in Fourier analysis", North-Holland (1985), 173—202.

[RS] N.M. Riviere and Y. Sagher, Interpolation between L^∞ and H^1, the real method. *J. Func. Anal.*, 14 (1974), 401—409.

[RT] F. Ricci and M.H. Taibleson, Boundary Value of harmonic functions in mixed normed spaces and their atomic structure, *Ann.Scuola Norm. Sup.*,*Pisa*, Cl.Sci., A(10)(1983), 1—54.

[S] D. Sarason, Functions of vanishing mean oscillation, *Trans, Amer. Math. Soc.* 207 (1975), 391—405.

[Se] C. Segovia, On the area function of Lusin, *Studia Math.*, 33 (1969), 312—343.

[Sem1] S. Semmes, Another characterization of H^p, $0<p<\infty$, with an application to interpolation, Proc. Conf. on Harmonic Analysis, Cortona, 1983, Lecture Notes in Math., 992, Springer-Verlag, 212—226.

[Sj] P. Sjölin, An H^p inequality for strongly singular integrals, *Math. Zeit.* 165 (1979), 231—238.

[So] F. Soria, Classes of functions generated by block and associated Hardy spaces, Ph. D. Thesis, Washington Univ. 1983.

[ST] 施咸亮, A. Torchinsky, A Note on vector-value singular integrals, 杭州大学学报, 3(1987), 292—295.

[St1] E.M. Stein, On the function of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88 (1958), 430—466.

[St2] ——, On the theory of harmonic functions of several variables II. Behaviour near the boundary, *Acta Math.*, 106 (1961), 137—174.

[St3] ——, The development of square function in the work of A. Zygmund, *Bull. Amer. Math. Soc.*, (N.S) 7 (1982), 359—376.

[St4] ——, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970. (中译本，奇异积分与函数的可微性，程民德、邓东皋等译，北京大学出版社，1986。)

[Str] J.-O. Stromberg, Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces, *Indiana U. Math. J.*, 28 (1979), 511—544.

[StrT] J.-O. Stromberg and A. Torchinsky, Weights, sharp-maximal functions and Hardy spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 3 (1980), 1053—1056.

[SW1] E.M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables, I. The theory of H^p spaces, *Acta Math.*, 103 (1960), 26—62.

[SW2] ——, On the interpolation of analytic families of operators acting on H^p spaces, *Tokoku Math. J.*, 9 (1957), 318—339.

[SW3] ——, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press. 1971. (中译本：欧氏空间上的Fourier分析引论，张阳春译，上海科技出版社，1987.)

[SZ] R. Salem and A. Zygmund, A convexity theorem, *Proc Nat. Acad. Sci.*, 34 (1948), 443—447.

[T1] M.H. Taibleson, The presevation of Lipschitz spaces under singular integral operators, *Studia Math.*, 24 (1963), 105—111.

[T2] ——, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-spaces I, *J Math. Mech.* 13 (1964), 407—480; II, (ibid.) 14 (1965), 821—840; III (ibid.) 15 (1966), 973—981.

[To] A. Torchinsky, Real-variable method in Harmonic analysis, Acad. Press. 1986.

[Tr] H. Triebel, Theory of function spaces, Birkhauser Verlag, Basel, Boston and Stuttgart, 1983.

[TW1] M. Taibleson and G. Weiss, The molecular characterization of certain Hardy spaces, *Asterisque*, 77 (1980), 67—151.

[TW2] M.H. Taibleson and G. Weiss, Certain function spaces connected with almost everywhere convergence of Fourier series, *Proc. of Conf. on Harmonic Analysis, Univ. of Chicago*, 1981, 95—113.

[U1] A. Uchiyama, A constructive proof of the Fefferman-Stein decomposition of BMO on simple martingales, Conf. on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund II, 495—505, 1983.

[U2] A. Uchiyama, A constructive proof of the Feffer-

man-Stein decomposition of BMO (R^n), *Acta Math.*, 148 (1982), 215—241.

[U3] ——, A remark on Carleson's characterization of BMO, Proc. Amer. Math. Soc., 79 (1980), 35—41.

[U4] ——, The Fefferman-Stein decomposition of smooth functions and its application to $H^p(R^n)$, *Pacific J. Math.* 115 (1984).

[U5] ——, A maximal function characterization of H^p on the space of homogeneous type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262 (1980), 579—592.

[U6] ——, Characterization of $H^p(R^n)$ in terms of generalized Littlewood-Paley g function, *Studia Math.*, 81 (1985), 135—158.

[U7] ——, Extension of the Hardy-Littlewood-Fefferman-Stein inequality, *Pacific J. Math.*, 120 (1985), 229—255.

[UW] A. Uchiyama and J.M. Wilson, Approximate identities and $H^1(R)$, *Proc. of A.M.S.*, 88 (1983), 53—58.

[V] N. Th. Varopoulos, BMO function and the $\bar\partial$ equation, *Pacific J. Math.*, 71 (1977), 221—273.

[W] 王斯雷，关于 g 函数的一些性质，中国科学，A辑，10(1984)，890—899.

[Wa] T. Walsh, The dual of $H^p(R_+^{n+1})$ for $p<1$, *Can. J. Math.*, 25 (1973), 567—577.

[We1] G. Weiss, An interpolation theorem for sublinear operators on H^p spaces, *Proc. AMS*, 8 (1957), 92—99.

[We2] ——, Some problems in the theory of Hardy spaces, *Proc. Symp. Pure Math. AMS Providence*, R.I., (35) 1979, 189—200.

[Wi] J. M. Wilson, A simple proof of the atomic decomposition for $H^p(R^n)$, $0<p\leq 1$, *Studia Math* 74(1982), 25—33.

[Wo] T.H. Wolff, Counterexamples with harmonic gradients in R^3, Harmonic Analysis Conf. in Honor of E

M. Stein., Princeton Univ., 1991.

[Y1] 姚璧芸，$S(f)$与$g_\lambda^*(f)$的BMO有界性，黑龙江大学学报(自然科学)，2(1986)，17—22.

[Y2] ——，BMO研究近况，数学进展，7(1988)，238—250.

[Z] A. Zygmund, Trigonometric series, I and II, 2nd edition, Cambridge Univ. Press, 1959.

[Zh] 张严，广义Abel平均在实$H^p(\mathbf{R}^n)$($0<p\leq 1$)上的收敛与逼近性质，北京师范大学学报，2(1988)，1—7.

[Zhu] 朱学贤，奇异积分算子在$H^1(\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2)$上的有界性，数学学报，6(1988)，800—813.

索　引

三 画

四 画

六　画

七　画

八　画

九　画

十　画

十一画

十三画

十四画